

IFIE 2025

Exercices Transferts Avancés

O. Louisnard

Y. Lalau
J. Escudero
S. Salvador
M. Milhé

Cette création est mise à disposition selon le Contrat :
Paternité - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 2.0
France

disponible en ligne

[http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/)
ou par courrier postal à Creative Commons, 171 Second Street, Suite
300, San Francisco, California 94105, USA.



1 Généralités. Révisions

Exercice 1.1 : Patinoire.

Une patinoire est constituée d'une dalle de béton posée sur un échangeur contenant un fluide frigorigène. La dalle est recouverte d'une couche de glace. La température de la face inférieure de la dalle de béton est de -12°C . La température ambiante est de 10°C .

- Représenter un champ de température dans tout l'ensemble et faire un schéma électrique équivalent.
- Quelle doit être l'épaisseur maximale de la couche de glace pour que sa température de surface n'excède pas -3°C ?
- Quelle est la température à l'interface béton-glace?
- La patinoire fait 60 m de long et 30 m de large. Quelle est la puissance frigorifique consommée (en W)?

Données :

- Épaisseur de béton : 4 cm,
- Conductivité thermique du béton : $1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- Conductivité thermique de la glace : $2 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- Coefficient d'échange entre la glace et l'air ambiant : $h = 8 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$

Exercice 1.2 : Faisceau de tubes.

Un débit d'air $\dot{m} = 0.75 \text{ kg s}^{-1}$ à 27°C circule dans une conduite rectangulaire de largeur $\ell = 80 \text{ cm}$ et de hauteur $H = 33 \text{ cm}$. On veut le réchauffer à 127°C grâce à un faisceau de tubes horizontaux en quinconce traversant la conduite latéralement, perpendiculaires au débit d'air. On suppose que leur paroi externe est à $T_P = 150^\circ\text{C}$.

Il y a $N_z = 10$ tubes de diamètre externe $d = 2 \text{ cm}$ sur la hauteur de la conduite. Leur écartement vertical est égal à $S_T = H/(N_z + 1)$ et leur écartement horizontal est $S_L = S_T$.

Calculez le nombre de rangées de tubes N_x nécessaire (on arrondira à l'entier supérieur).

Corrélation : la figure 2 montre les différents arrangements géométriques possibles.

La corrélation proposée par Žukauskas & Ulinskas (1985) s'écrit :

$$\text{Nu} = C \left(\frac{S_T}{S_L} \right)^k \text{Re}_{\max}^\alpha \text{Pr}^\beta \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_w} \right)^{0.25}$$

où :

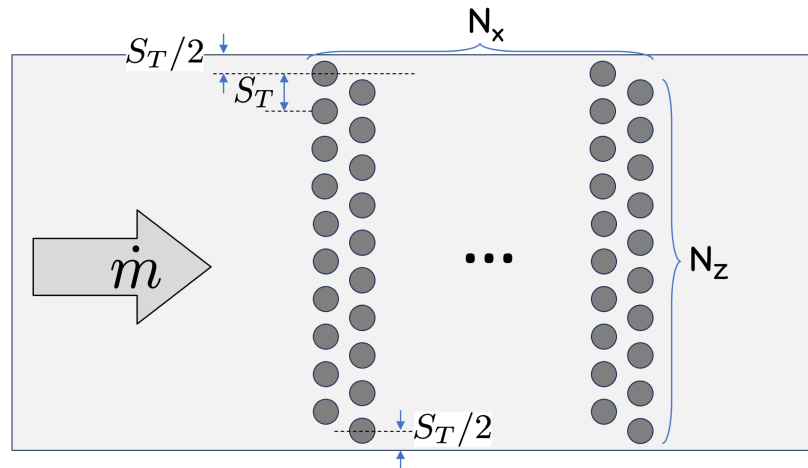


FIGURE 1 – Conduite équipée de tubes chauffants

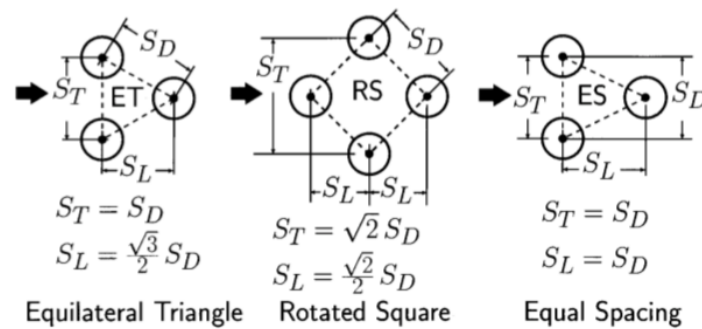


FIGURE 2 – Différentes configurations de tubes en quinconce (d'après Wang et al. 2000)

- $Re_{\max}$ est le nombre de Reynolds basé sur la vitesse maximale entre les tubes, donnée par :

$$\frac{V_{\max}}{V_{\infty}} = \max \left\{ \frac{S_T^*}{(S_T^* - 1)}, \frac{\frac{1}{2} S_T^*}{\sqrt{(\frac{1}{2} S_T^*)^2 + S_L^{*2} - 1}} \right\}$$

où $S_T^* = S_T/d$ et $S_L^* = S_L/d$.

- la correction Pr/Pr_w ne doit pas être prise en compte pour des gaz,
- les coefficients C , k , a , et b dépendent de la gamme de $Re_{\max}$ comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

$Re_{\max}$	C	k	α	β	
$Re_{\max} < 40$	1.04	0	0.4	0.36	
$40 < Re_{\max} < 1000$	0.71	0	0.5	0.36	
$1000 < Re_{\max} < 2 \times 10^5$	0.35	0.2	0.6	0.36	si $S_T/S_L < 2$
	0.4	0	0.6	0.36	si $S_T/S_L > 2$
$Re_{\max} > 2 \times 10^5$	0.031	0.2	0.8	0.4	

Exercice 1.3 : Convection naturelle autour d'un poêle.

Un poêle cylindrique de hauteur $H = 1.2\text{ m}$ et de rayon 70 cm a sa température de paroi extérieure à 70°C . La température de l'air ambiant est de 18°C .

- Calculez le coefficient d'échange convectif entre le poêle et l'air ambiant.
- Calculez la puissance transmise à la pièce par convection naturelle.



2 Ailettes et quadripôles

Exercice 2.1 : Condenseur d'un réfrigérateur

Un fluide caloporteur circule dans la boucle frigorifique d'un réfrigérateur/congélateur. Le condenseur est un tube de diamètre externe $d = 5\text{ mm}$ formant des "U" horizontaux (Fig. 3a).

On note (Fig. 3b) $\ell = 10\text{ cm}$ l'espace entre deux branches (comptée à partir des axes du tube), $a = 70\text{ cm}$ la longueur des branches et il y a $n_B = 15$ branches. La température d'équilibre liquide-vapeur dans le condenseur est de $T_0 = 50^\circ\text{C}$ et celle de l'air extérieur est de $T_\infty = 20^\circ\text{C}$. Le coefficient de convection entre le tube et l'air extérieur est estimé à $h = 3\text{ W m}^{-2}\text{ K}^{-1}$. On négligera la résistance convective interne et la résistance conductive sur l'épaisseur des tubes.

- Quelle serait la puissance transférée entre le tube et l'air extérieur en l'absence d'ailettes ? On négligera les arrondis des U et les résistances thermiques autres que celle de convection extérieure.
- Le cycle frigorifique a un COP de 3 et on donne pour l'appareil une consommation électrique de 140 kWh/an . Le rendement du compresseur peut être estimé à 0.85. Quelle puissance doit être évacuée par le condenseur ?

Pour transférer la puissance manquante, on soude sur les tubes n_T tiges de diamètre $d_T = 1.5\text{ mm}$ en aluminium ($\lambda = 204\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1}$) sur toute la hauteur (Fig. 3a), qui vont faire office d'ailette.

- Justifier le fait :

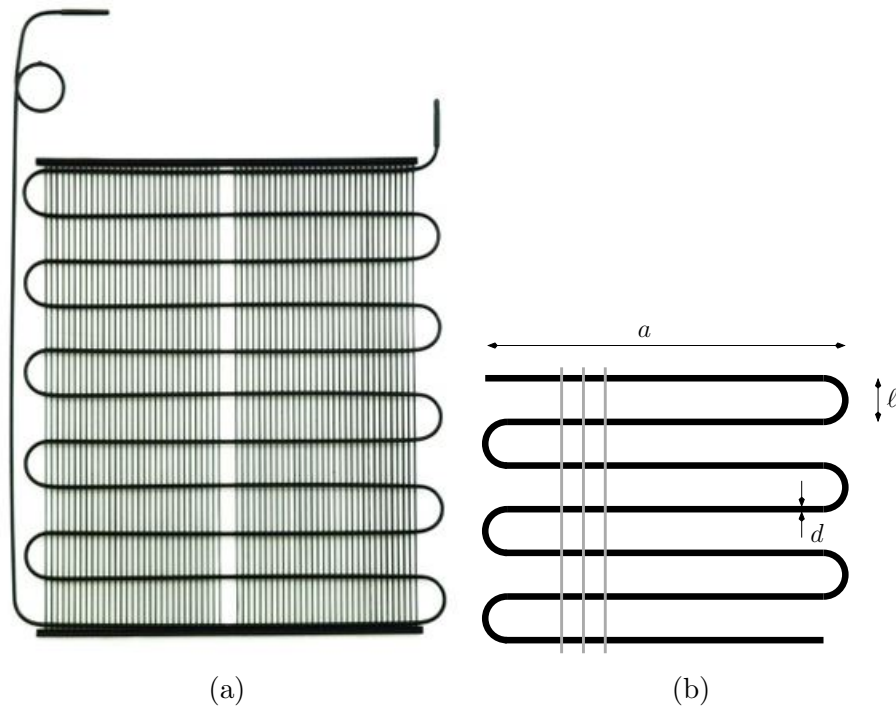


FIGURE 3 – (a) Exemple de condenseur sur un réfrigérateur. (b) Dimensions

- que le tube peut être considéré comme équipé de $(2n_B - 2)n_T$ ailettes de longueur $\ell/2$ (rappel : ℓ est la distance entre deux branches),
 - que ces ailettes sont adiabatiques.
- d) En déduire le nombre de tiges qu'il faut souder sur le tube pour assurer le transfert recherché, et la distance entre deux tiges.
On supposera que la surface de contact entre tubes et tiges est suffisamment petite pour que le résultat de la question 1 reste inchangé.
- e) Calculez l'efficacité et le rendement de chaque ailette.

Exercice 2.2 : Tubes cloutés

Une entreprise fournit des tubes dits "cloutés" : des petits cylindres en acier sont soudés sur la paroi externe d'un tube.



- a) À quoi ça peut bien servir ? Qu'y a-t-il à l'intérieur du tube ? À l'extérieur ? Pourquoi ce design un peu « brutal » par rapport à des tubes à ailettes plus classiques ?
- b) Il y a N_R clous par circonférence, et n_L clous par mètre linéaire.

Diamètre clous	d	1.3 cm
Longueur clous	ℓ	5 cm
Nombre de clous par circonférence	N_R	20
Nombre de clous par m linéaire	n_L	40 m ⁻¹
Diamètre tube	D	25 cm
Coefficient de transfert convectif	h	60 W m ⁻² K ⁻¹

Calculez la résistance thermique d'un clou en le considérant comme une ailette adiabatique, ainsi que son efficacité et son rendement.

- c) L'hypothèse précédente vous paraît-elle justifiée, eu égard à la géométrie d'une telle ailette ?
- d) Reprendre les calculs précédents en supposant un coefficient de convection au bout du clou égal à $h_\ell = h/2$. Commentaires ?
- e) Calculez l'efficacité et le rendement d'un tronçon de tube clouté.

3 Transferts instationnaires

Exercice 3.1 : Mur semi-infini : autre méthode de résolution

(Note importante : faire cet exercice est une bonne idée pour aborder sereinement les problèmes de transfert avec changement de phase...)

On peut retrouver le résultat du mur semi-infini auquel on applique un échelon de température par une méthode évitant les transformées de Laplace.

On cherche la solution sous la forme :

$$T(x, t) - T_0 = f(\eta) \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{x}{2\sqrt{at}}$$

- a) Écrire les dérivées $\partial T / \partial t$ et $\partial^2 T / \partial x^2$ en faisant intervenir f' et f'' .

Note : on rappelle que pour dériver $y = Kx^\alpha$, il est en général plus efficace d'écrire :

$$\frac{dy}{y} = \alpha \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \alpha \frac{y}{x}$$

- b) En déduire que l'équation de la chaleur conduit à l'équation différentielle :

$$f'' + 2\eta f'(\eta) = 0$$

- c) Résoudre cette équation et montrez que la solution s'écrit :

$$f(\eta) = K \operatorname{erf}(\eta) + L$$

- d) Retrouvez le champ de température obtenu dans le cours.

Exercice 3.2 : Mur semi-infini avec convection

Reprendre l'exemple du mur semi-infini avec une condition de convection en $x = 0$.

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}(x = 0) = h(T(x = 0) - T_\infty)$$

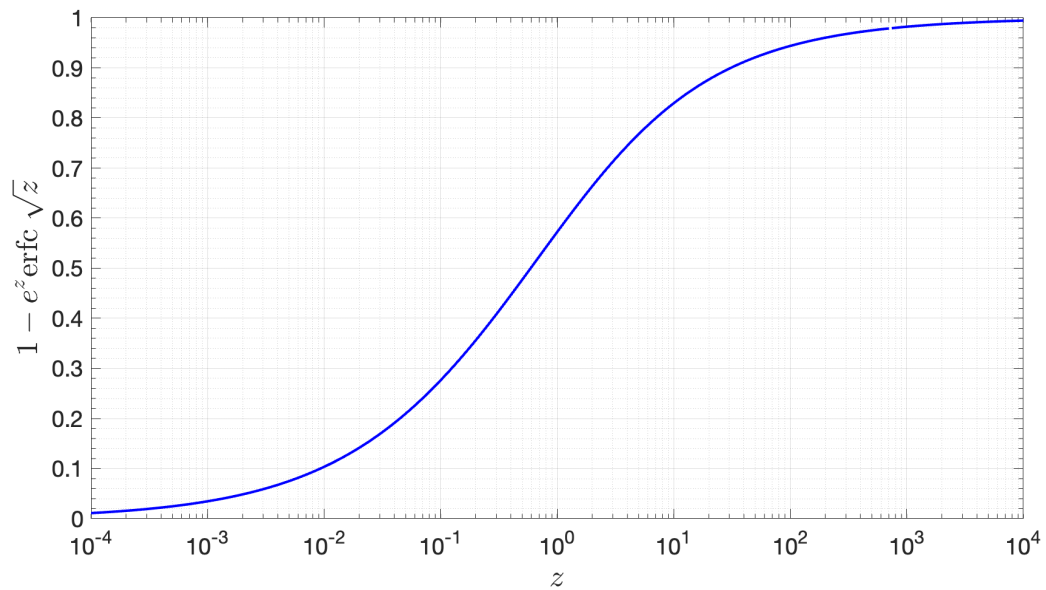
- a) Calculez la température de surface au cours du temps. Vers quelle valeur tend-elle quand $t \rightarrow \infty$?

Exprimez un ordre de grandeur du temps caractéristique t_c pour atteindre cette limite.

- b) Combien vaut $\frac{T(x = 0) - T_0}{T_\infty - T_0}$ à $t = t_c$?

Au bout de combien de temps a-t-on $T(x = 0) - T_0 = T_\infty - T_0$ à 5 % près ?

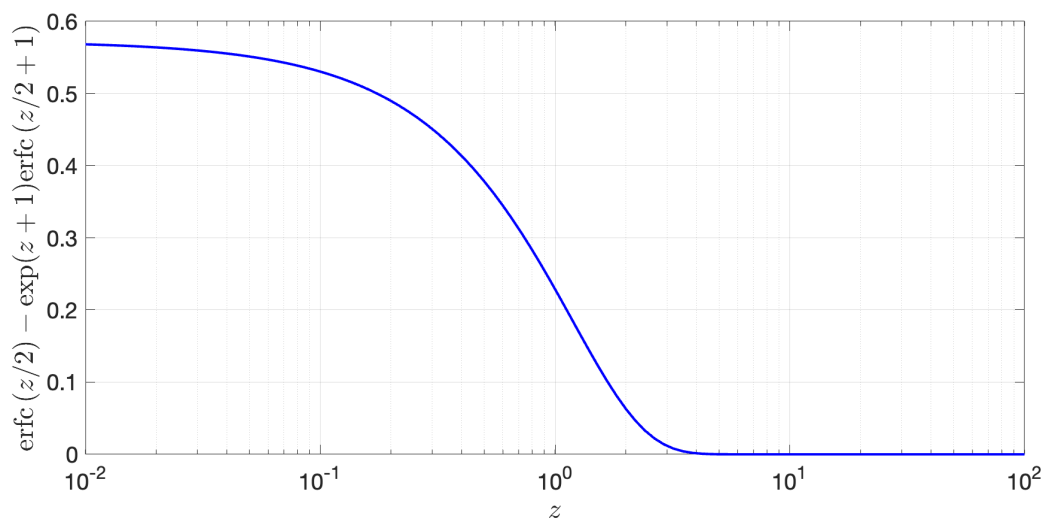
On donne le graphe de $f(z) = 1 - e^z \operatorname{erfc} \sqrt{z}$:



- c) Calculez le flux rentrant en $x = 0$. Par rapport à sa valeur initiale, quelle est sa valeur à $t = t_C$?
- d) Calculez le champ de températures, et exprimez-le en fonction des variables :

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{at}} \quad \tau = \frac{t}{t_C}$$

- e) Exprimez la température en un point d'abscisse L en fonction des deux variables τ et $\text{Bi}_L = hL/\lambda$. En déduire l'expression de ce champ à $t = t_C$. Concluez (on pourra ré-examiner l'exercice du gâteau de Fourier à la lumière des présents résultats...).
- On donne le graphe de $g(z) = \text{erfc}(z/2) - \exp(z+1)\text{erfc}(z/2+1)$



Exercice 3.3 : Cylindre dans un milieu semi-infini avec convection

On considère un cylindre de rayon R_0 plongé dans un milieu infini. Initialement tout l'espace est isotherme à T_0 . À $t = 0$, la température au centre du cylindre est portée à T_∞ et il y a une résistance thermique $\mathcal{R}_{th}$ entre le centre du cylindre et la paroi.

Calculez le profil de température dans l'espace autour du cylindre en fonction du temps, la température de paroi, et le flux échangé par le cylindre avec son environnement.

On pourra s'inspirer de l'exercice précédent.

Exercice 3.4 : Diffusion dans un solide en régime transitoire - Cémentation

Une pièce d'acier ayant une concentration massique initiale uniforme en carbone $\rho_{A0} = 0.003 \text{ kg m}^{-3}$ est placée dans une atmosphère carbonée. La concentration surfacique est de $\rho_{AS} = 0.0075 \text{ kg m}^{-3}$. La diffusivité du carbone dans l'acier est $D = 1.1 \times 10^{-11} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ à la température considérée. On suppose que la pièce d'acier est semi-infinie.

- Ecrire l'équation de conservation du carbone dans l'acier et les conditions aux limites et la condition initiale. On spécifiera les hypothèses.
- Écrire la solution.
- Quelle est la profondeur de diffusion au bout de 2 h ? Quelle épaisseur doit avoir le mur pour que l'hypothèse de mur semi-infini reste valide ?
- Calculer la concentration massique à une profondeur de 200 μm au bout de 2 h de traitement.
- Quelle quantité de carbone a pénétré l'acier au bout de 2 h (pour une surface de 1 m^2) ?
- Discussion.
Que se passe-t-il quand on arrête la phase d'enrichissement ?
 - si on maintient la température élevée
 - si on refroidit

Exercice 3.5 : Lixiviation d'un bloc de déchet stabilisé.

Les déchets dangereux sont stabilisés par mélange avec un liant hydraulique (ciment) et mis en forme. On souhaite examiner la manière dont les polluants emprisonnés dans un déchet stabilisé sont susceptibles d'être lessivés par l'eau de pluie ou de ruissellement (phénomène de lixiviation). Pour cela, on immerge un échantillon cubique du déchet dans de l'eau distillée (Fig. 4) constamment renouvelée. La durée du test peut atteindre plusieurs mois.

FIGURE 4 – Dispositif de lixiviation

On suppose qu'il n'y a qu'un seul polluant, le plomb ($A = \text{Pb}^{++}$), qui migre sous forme ionique par diffusion dans la matrice solide ($B = \text{déchet} + \text{liant}$).

On donne :

- l'arête du cube : $a = 5 \text{ cm}$,
- le coefficient de diffusion du plomb dans la matrice solide : $D_{AB} = 10^{-13} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
- la concentration massique initiale en plomb dans le solide : $\rho_{A0} = 50 \text{ kg m}^{-3}$

- a) Calculer l'ordre de grandeur de la distance parcourue par le plomb en un an.
- b) En déduire que le système peut être représenté par un milieu 1D semi-infini. Dessiner sans calcul l'évolution de la concentration en plomb dans le solide au cours du temps.
- c) Écrire l'équation de conservation du plomb, les conditions aux limites et la condition initiale.
- d) Donner la solution sous forme littérale.
- e) Montrer que la densité de flux de plomb transmis à l'eau au cours du temps s'écrit :

$$\mathbf{n}_{A0} = \frac{\rho_{A0} \sqrt{D_{AB}}}{\sqrt{\pi t}}$$

- f) En déduire la quantité de plomb relarguée par le solide en 3 mois.

Exercice 3.6 : Photosynthèse

La présence de CO_2 en solution est essentielle pour la croissance des plantes aquatiques (photosynthèse). On considère un fluide stagnant (une piscine...) de profondeur supposée infinie dans lequel la concentration massique en CO_2 , notée ρ_A , est initialement nulle. Au temps $t = 0$, l'eau est mise en contact avec une source de CO_2 , par exemple l'air, qui maintient une concentration en surface (en $z = 0$). L'accumulation de CO_2 par l'eau est inhibée par la réaction de photosynthèse, qu'on peut considérer en première approximation comme une réaction chimique homogène d'ordre 1 : par unité de volume, le taux de disparition de CO_2 est $r_A = -k\rho_A$.

- a) On suppose que l'eau reste immobile et que la masse de CO_2 dissout est négligeable devant la masse d'eau. On fait l'hypothèse d'un coefficient de diffusion D constant. Écrire l'équation de conservation du CO_2 , les conditions aux limites et la condition initiale.
- b) Effectuer la transformation de Laplace de ces équations. En déduire la solution du problème dans l'espace de Laplace.
- c) Donner l'expression de $\rho_A(z, t)$ après inversion de Laplace.

On donne la transformée inverse :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\exp(-a\sqrt{p+b})}{p} \right) &= \frac{1}{2} \left[\exp(-a\sqrt{b}) \operatorname{erfc} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} - \sqrt{bt} \right) \right. \\ &\quad \left. + \exp(a\sqrt{b}) \operatorname{erfc} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} + \sqrt{bt} \right) \right] \end{aligned}$$

Exercice 3.7 : Pollution automobile

La circulation automobile est responsable de la formation d'oxyde d'azote gazeux NO_2 . Sous l'action du rayonnement solaire, cet oxyde d'azote réagit avec les hydrocarbures imbrûlés présents dans l'atmosphère pour former du peroxyacétylnitrate (PAN) selon une réaction du premier ordre. La consommation volumique de NO_2 se traduit par un terme source $R_A = -kC_A$, où C_A est la concentration molaire en oxyde d'azote (il s'agit d'une réaction chimique d'ordre 1).

On note z l'altitude par rapport au sol.

Au petit matin (qu'on appellera $t = 0$ avec peu de poésie), l'air est pur et la concentration en NO_2 est négligeable. En $z = 0$, une densité de flux molaire N_0 constante de NO_2 est produite par les échappements des automobiles.

On suppose l'air parfaitement immobile (période de smog photochimique), de sorte que les processus de transferts de matière sont essentiellement diffusifs. Le coefficient de diffusion de NO_2 dans l'air est $D = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

On donne $k = 0.03 \text{ s}$, $N_0 = 3 \times 10^{-8} \text{ mol m}^{-2} \text{ s}^{-1}$; la température ambiante est de 310 K .

- Ecrire l'équation de conservation de C_A en régime transitoire. On fera l'hypothèse que $C_A \ll C$, où C est la concentration molaire totale.
- Ecrire les deux conditions aux limites en $z = 0$ et $z = +\infty$ ainsi que la condition initiale.
- Déterminer la solution dans l'espace de Laplace.
- Déduisez-en l'expression de la concentration molaire de NO_2 au sol en fonction du temps.

Que vaut cette concentration molaire à l'équilibre (quand $t \rightarrow \infty$) ?

Une pression partielle en NO_2 de 0.2 Pa est suffisante pour provoquer des lésions pulmonaires. Faut-il donner l'alerte ?

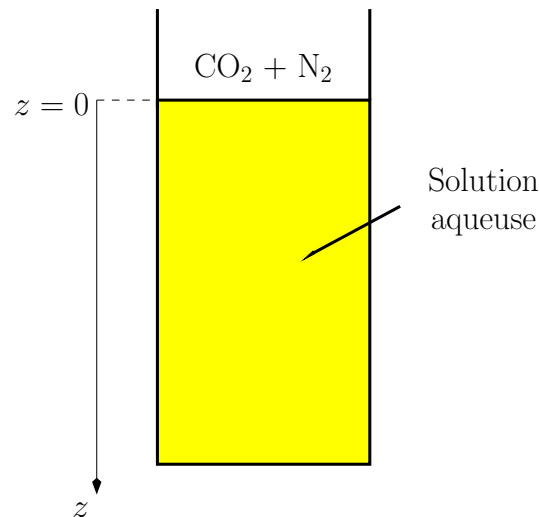
On donne :

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{p\sqrt{p+a}} \right) = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{erf} \sqrt{at}$$

- En pratique, au bout de combien de temps est elle obtenue (à 10^{-4} près) ?
- Déterminez le profil de concentration vertical à l'équilibre ?
À quelle altitude doit-on monter pour avoir une concentration égale à 5 % de celle au sol ?

Exercice 3.8 : Dissolution du CO₂ dans une solution de carbonate de sodium

Une solution aqueuse de carbonate de sodium est mise en présence d'un mélange gazeux de CO₂ et d'azote. Le CO₂ dissous diffuse dans l'eau et réagit avec le carbonate en produisant du bicarbonate de sodium, selon la réaction d'ordre 1 et de constante de réaction k_1 :



On note D le coefficient de diffusion du CO₂ dans l'eau, supposé constant. On rappelle que la concentration en CO₂ dissous à la surface suit la loi de Henry :

$$C_{\text{CO}_2} = k_H p_{\text{CO}_2},$$

où p_{CO_2} est la pression partielle en CO₂ au-dessus du liquide.

Données numériques :

Pression atmosphérique	p_0	101 325 Pa
Température ambiante	T_0	298 K
Fraction molaire de CO ₂ dans le gaz	y_{CO_2}	10^{-3}
Coefficient de diffusion à 298 K	D	$1.58 \times 10^{-9} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
Constante de la réaction à 298 K	k	$5 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$
Constante de Henry à 298 K	k_H	$3.91 \times 10^{-4} \text{ mol m}^{-3} \text{ Pa}^{-1}$

- Justifiez que la solution est très diluée en CO₂ dissous.
Écrire l'équation de conservation du CO₂ dans l'eau en régime permanent. En supposant un transfert unidimensionnel (suivant z), donner l'expression de l'équation différentielle qui permettra de déterminer la concentration en fonction de z .
- Écrivez la condition initiale Initialement, il n'y a pas de CO₂ dissous :
- Donner les deux conditions en limites :

- à la surface de l'eau,
 - en $z = +\infty$, en supposant que la profondeur du récipient est grande par rapport à la dimension caractéristique des transferts diffusifs.
- d) Résoudre le système d'équations dans l'espace de Laplace et en déduire le profil de concentration en CO_2 dans le récipient, en régime permanent. Représentez ce profil et indiquer l'ordre de grandeur de l'épaisseur δ dans laquelle a lieu la réaction.
- e) (Optionnel) calculez le profil de concentration $C_A(z, t)$.
On donne :

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{p} e^{-x\sqrt{p+k}} \right) = \frac{1}{2} \left[e^{-x\sqrt{k}} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} - \sqrt{kt} \right) + e^{x\sqrt{k}} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} + \sqrt{kt} \right) \right]$$

Exercice 3.9 : Flux périodique sur un mur d'épaisseur finie

On considère un mur d'épaisseur e soumis à une densité de flux sinusoïdale de fréquence angulaire ω à moyenne nulle sur sa face $x = 0$, et échangeant par convection sur sa face $x = e$ avec un fluide à T_∞ .

- a) Formulez le problème et adimensionnalisez-le en faisant apparaître un nombre de Biot et le nombre $\Omega = \omega e^2/a$, où a est la diffusivité du matériau.
- b) Transformez le problème en problème homogène en soustrayant à la variable dépendante $u(x, t)$, une solution $u_0(x, t)$ que l'on spécifiera. Que représente cette dernière ?
- c) Calculez le profil de température au cours du temps.
- d) Calculez le flux sortant en e .
- e) Calculez le déphasage entre le flux sortant et le flux rentrant. Tracez-le en fonction de Ω . On prendra Bi de l'ordre de 1.
- f) On suppose maintenant que le flux incident est donné par une série de Fourier :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \tilde{q}_p \sin(p\omega\tilde{t} + \phi_p)$$

Exprimez le flux sortant.

- g) Résumé des formules

$$x/e \quad t/T \quad \frac{\lambda e}{\tilde{q}_{\text{in}}}(T - T_\infty) \quad \frac{q_{\text{out}}}{q_{\text{in}}}$$

$$u(x, t) = -\sin \Omega t \left[x - \frac{1 + \text{Bi}}{\text{Bi}} \right] + \Omega \sum_{n=1}^{\infty} (C_n(\Omega) \cos \Omega t + S_n(\Omega) \sin \Omega t) \cos(k_n x)$$

$$C_n(\Omega) = \frac{\gamma_n k_n^2}{k_n^4 + \Omega^2} \quad S_n(\Omega) = \frac{\gamma_n \Omega}{k_n^4 + \Omega^2}$$

Exercice 3.10 : Échauffement de plaquettes de freinage

Un véhicule d'une tonne roulant à 30 km h^{-1} s'immobilise en 5 s par freinage.

- a) Calculer la puissance moyenne dissipée dans les freins.

On suppose qu'un huitième de cette puissance est dissipé dans une garniture de frein à disque (Figure 1). La surface en contact avec le disque est 45 cm^2 .

- b) Calculer la densité de flux q_0 moyenne appliquée à la surface de cette garniture.
 c) En supposant que la garniture est un milieu semi-infini (ce qui peut se justifier compte-tenu de la durée très brève du phénomène), montrer¹ que l'augmentation de température ΔT de la surface de la garniture en contact avec le disque varie selon la relation :

$$\Delta T = \frac{2q_0}{b} \sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

- d) On donne pour la garniture : $\lambda = 1.25 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 2000 \text{ kg m}^{-3}$, $c_p = 1000 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Calculer ΔT à la fin du freinage.
 e) Vérifier l'hypothèse du mur semi infini. Calculer la longueur de diffusion à la fin du freinage.

1. On pourra se servir des résultats de l'exercice « Mur semi-infini avec flux constant »

4 Air humide

Exercice 4.1 : Lecture du diagramme

- Le thermomètre sec d'une centrale météorologique indique une température de 20°C et le thermomètre humide 8°C . A l'aide du diagramme, déduire les caractéristiques de l'air humide en considérant une pression atmosphérique standard.
- Le thermomètre sec de cette même centrale météorologique indique maintenant 25°C et une humidité relative de 50 %. Quelles sont les nouvelles caractéristiques de l'air humide ?
- Reprendre la question précédente en calculant maintenant les valeurs caractéristiques plutôt que de les lire sur le diagramme.
On ne calculera pas la température humide ni la température de rosée (pourquoi ?).

Exercice 4.2 : Mélange d'airs humides

Dans un caisson de mélange, il rentre :

- de l'air humide à $\theta_1 = 3^\circ\text{C}$ et une humidité absolue $w_1 = 2.5 \text{ g/kg AS}$ avec un débit de $30 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$
- de l'air humide à $\theta_2 = 30^\circ\text{C}$ et une température humide $\theta_{\text{sat}2} = 22^\circ\text{C}$, avec un débit de $2.5 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$

Calculer les caractéristiques du point de mélange.

Exercice 4.3 : Chauffage d'un air humide

De l'air à 5°C et 75 % est chauffé, à pression constante, par des résistances électriques jusqu'à une température de 32°C

- Comment évolue l'humidité absolue ?
- Donner les caractéristiques du point final. On veillera à utiliser successivement la méthode graphique et le calcul.
- Quelle est la chaleur fournie à l'air humide par masse d'air sec ?

Exercice 4.4 : Séchage de piments d'Espelette

On souhaite sécher 100 kg de piment d'Espelette en réduisant leur teneur en eau de 80 % à 5 % (sur la base de la masse initiale).

Pour évacuer l'eau extraite de ces piments on fait circuler de l'air à 30°C et 45 %, qui ressort à 55°C et 80 %. Le séchage doit se faire sur trois jours consécutifs, pendant les 8 heures quotidiennes d'ensoleillement.

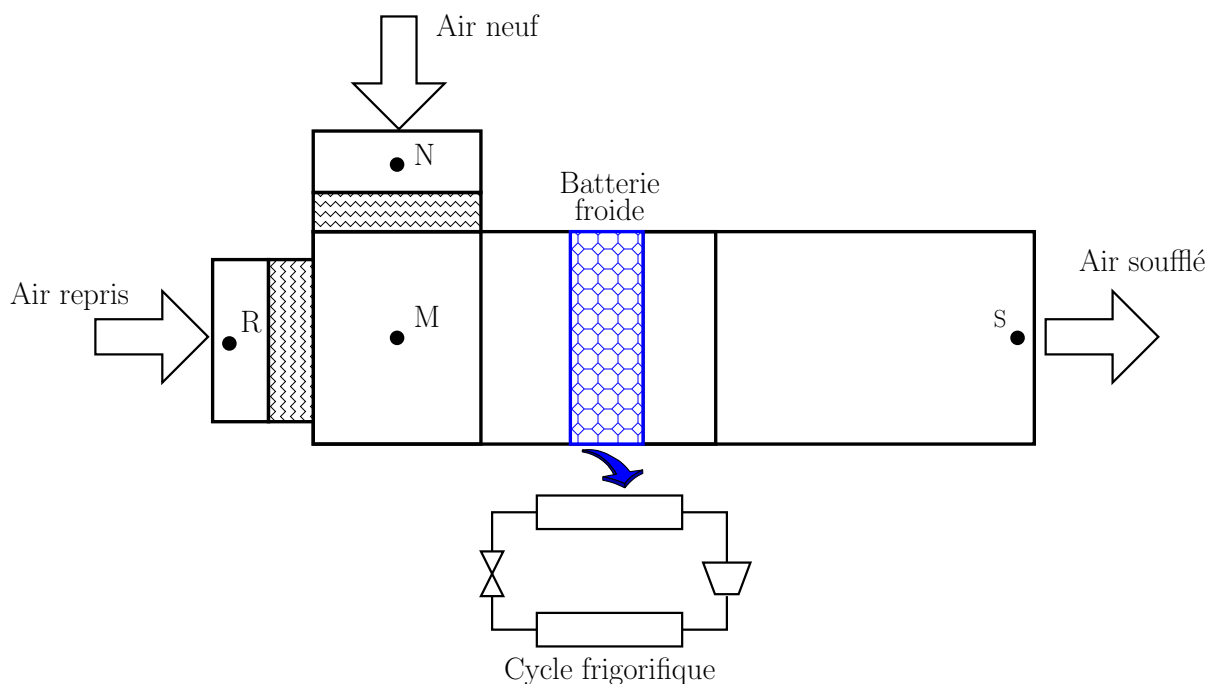
- Quel doit être le débit d'air ?
- Quelle est l'énergie totale mise en oeuvre ?
- En supposant que la serre reçoit en moyenne 450 W m^{-2} durant la journée, de combien de surface doit-on disposer ?

Exercice 4.5 : Buée sur une vitre

- Un bus de 50 m^3 transportant 63 personnes démarre un matin dans un environnement à 5°C et 30 %. Sachant que chaque personne génère environ 40 g d'eau par heure, au bout de combien de temps de la buée va-t-elle apparaître sur les vitrages du compartiment (qui restent à 5°C) si celui-ci n'est pas chauffé ?
- Supposons maintenant que le bus est préalablement chauffé à 22°C puis maintenu à cette température. Calculez le nouveau temps avant apparition de la buée si la température interne du vitrage est de 18°C .
- Quel débit minimal d'air neuf doit-on alors introduire dans le bus pour éviter toute condensation.

Exercice 4.6 : Centrale de traitement de l'air

Une CTA est installée pour climatiser un ensemble de bureau. Elle comporte notamment une batterie froide à détente directe dont la puissance frigorifique est directement tournée à l'évaporateur d'une machine frigorifique. Le schéma de principe est présenté sur la figure ci-dessous.



L'air dans les locaux doit être maintenu à une température de 25°C et une humidité de 50 %. Celui-ci est constamment renouvelé.

En période estivale on souffle dans les bureaux de l'air à 16°C et 68 % avec un débit

de $0.8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Pour ce faire, l'air repris est mélangé avec l'air neuf (extérieur 32°C 35 %, débit $0.56 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$)

- Déterminer les caractéristiques du point de mélange M ;
- Tracer l'évolution de l'air sur le diagramme de l'air humide ;
- Quelle est le débit d'eau condensée par la batterie froide ?
- Quelle est la température d'ébullition du fluide frigorigène du groupe froid ?
- Calculer la puissance et l'efficacité de la batterie froide.

Exercice 4.7 : Comportement hydrique d'une paroi

Un considère la paroi décrite dans le tableau ci-dessous (de l'extérieur vers l'intérieur). A l'intérieur, on a de l'air à 22°C et 95 % d'humidité (une salle de bain) et à l'extérieur de l'air à 10°C et 60 %.

Matériaux	$\lambda \text{ (W m}^{-1} \text{ K}^{-1})$	$\mu \text{ (-)}$	$e \text{ (cm)}$
Enduit	0.7	10	1.5
Béton plein	2.0	120	20
Polystyrène expansé	0.056	60	12
Plâtre	0.56	10	2

Tracer un diagramme représentant les profils de pression partielle de vapeur p_v et de pression de vapeur saturante p_{sat} (dit *diagramme de Glaser*) pour cette configuration d'isolation par l'intérieur. Commentaires ?

On supposera des résistances convectives de $0.04 \text{ m}^2 \text{ K W}^{-1}$ à l'extérieur et $0.13 \text{ m}^2 \text{ K W}^{-1}$ à l'intérieur.

Note : le coefficient de résistance hydrique μ signifie que la résistance au transfert de vapeur d'eau est μ fois plus élevée que dans de l'air.

5 Transfert de matière

Exercice 5.1 : Fractions molaires / massiques

L'air est composé essentiellement de O_2 et de N_2 . Leurs fractions molaires sont dans un rapport $\alpha = 0.21/0.79 = 0.266$.

Quels sont leurs fractions massiques ?

Exercice 5.2 : Expérience de pensée

Une cage en verre a deux compartiments identiques, séparés initialement par une cloison amovible. Dans l'un il y a N frelons, dans l'autre N moucheron. On enlève la cloison, les deux espèces finissent par se mélanger. À la fin, ils co-existent dans une belle harmonie.



- a) Quels sont les nombres d'individus et les masses contenues dans les deux compartiments, aux instants initial et final ?
Y'a-t-il eu un transfert net de nombre d'individus ? Y'a-t-il eu un transfert net de masse ?
- b) Exprimez les concentrations de chaque espèce (F = frelons, M = moucheron) et la concentration totale.
- initiales dans chaque compartiment
 - finale

On fera un premier tableau de concentrations en nombre et un second en massique :

	En nombre (C)		
	Initial comp. 1	Initial comp. 2	Final
Frelons C_F			
Mouchérons C_M			
Totale $C = C_F + C_M$			

	En masse (ρ)		
	Initial comp. 1	Initial comp. 2	Final
Frelons ρ_F			
Mouchérons ρ_M			
Totale $\rho = \rho_F + \rho_M$			

- c) Que peut-on dire de l'évolution de la concentration totale en nombre $C = C_F + C_M$ entre l'instant initial et l'instant final? Peut-on généraliser cette constatation à n'importe quel instant intermédiaire et en n'importe quel point? Mêmes questions pour la concentration en masse?
- d) Que peut-on en déduire sur les vitesses barycentriques molaire $\mathbf{v}^*$ et massique $\mathbf{v}$?
- e) On ne le dit pas souvent, mais les frelons adorent manger des mouchérons. Reprendre l'expérience, qualitativement, dans les deux cas extrêmes, en essayant à chaque fois de visualiser la localisation des deux populations :
- les frelons ont vraiment très faim, ils ont tendance à croquer tout moucheron qui passe à leur portée.
 - les frelons sont feignants ce jour-là, il croquent juste un petit moucheron à l'occasion.

Exercice 5.3 : Diffusion d'une odeur

On considère une source d'odeur à la surface du sol. Celle-ci peut être agréable, comme dans le cas d'un arbre en fleur, ou désagréable dans le cas d'un tas de matériaux souillés. Dans un but de simplification, cette source sera représentée par une demi-sphère. L'environnement est parfaitement calme. La source d'odeur impose à sa surface une fraction molaire de 0.1 % de l'espèce odorante dans l'air.

A quelle distance doit-on se trouver pour que le nez — capable de détecter 10 ppm de

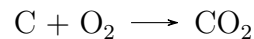
cette espèce — ne soit plus perturbé par l'odeur ? On abordera le problème en régime permanent, en montrant qu'une géométrie 1D sphérique est adaptée.

Données :

Rayon de la source odorante : $r_0 = 2 \text{ m}$
 Coefficient de diffusion de l'espèce odorante dans l'air : $D = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

Exercice 5.4 : Diffusion autour d'une particule en combustion

Une particule de carbone de rayon $r_0 = 2 \text{ mm}$ brûle dans de l'oxygène pur à $T_0 = 850^\circ\text{C}$ à la pression $p_0 = 1 \text{ atm}$ suivant la réaction :



On suppose la réaction instantanée et que le seul mécanisme limitant les transferts est la diffusion du CO_2 dans O_2 entourant la particule. On a donc du CO_2 pur à la surface de telle sorte que les fractions molaires sont :

	$r = r_0$	$r \rightarrow \infty$
p_{CO_2}	1	0
p_{O_2}	0	1

On suppose que le problème est monodimensionnel à symétrie sphérique et en régime permanent. On note D_{AB} le coefficient de diffusion de $A = \text{CO}_2$ dans $B = \text{O}_2$ qui vaut $D_{AB} = 1.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ à 850°C .

- a) Montrer, en argumentant, que la densité de flux molaire $\mathbf{N}_A$ est donnée par :

$$\mathbf{N}_A = -D_{AB} \frac{p_0}{\mathcal{R}T_0} \mathbf{grad} x_A$$

- b) Écrire l'équation de conservation de CO_2 en coordonnées sphériques. En déduire la loi $x_A(r)$
 c) Déterminer l'expression du débit molaire $\dot{n}$ de CO_2 produit par la réaction de combustion, et calculez-le.
 d) (optionnel) Retrouvez la valeur du coefficient de diffusion par la théorie de Chapman-Enskog.

Exercice 5.5 : Perméabilité des solides aux gaz

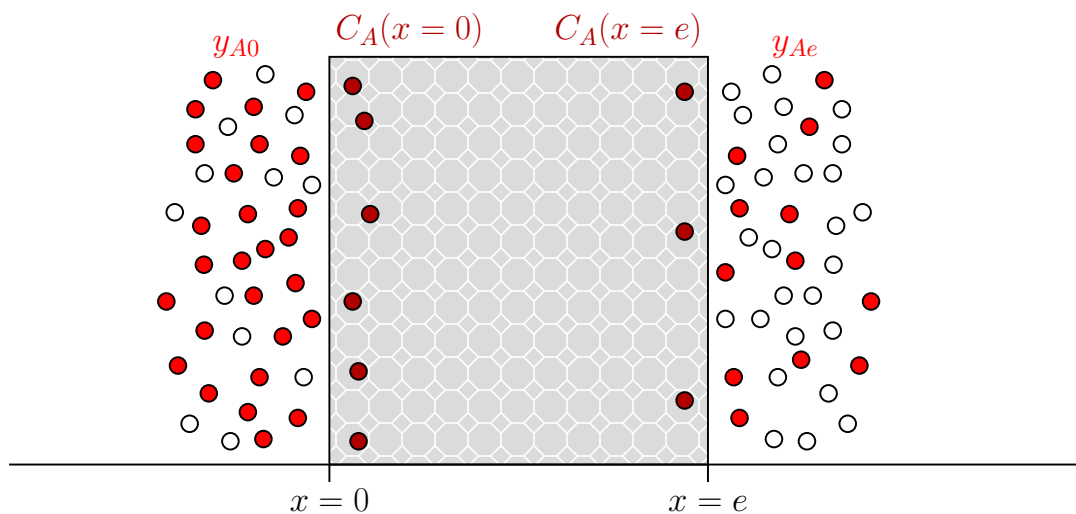
L'équilibre entre un gaz et un solide se modélise en général par une loi similaire à la loi de Henry :

$$C_A = S_{AS} p_A$$

où :

- C_A est la concentration du gaz A « dissous » dans le solide,
- p_A est la pression partielle du gaz A dans le mélange gazeux autour du solide,
- le coefficient S_{AS} est appelé solubilité (unité SI $\text{mol m}^{-3} \text{Pa}^{-1}$).

Un film solide d'épaisseur e sépare deux mélanges gazeux à même pression totale p_0 et même température T_0 , mais des fractions molaires du gaz A respectivement de y_{A0} et y_{Ae} de chaque côté. On suppose que seul le gaz A pénètre dans le solide.



- Sur les deux faces du film en $x = 0$ et $x = e$, écrire les concentrations en gaz dissous. On supposera dans la suite que $x_A \ll 1$ dans le solide (voir éventuellement questions 5.5.5 et 5.5.6)
- Écrire l'équation de conservation de A dans le solide et la résoudre en régime stationnaire.
Montrez que la densité de flux molaire s'écrit :

$$N_A = \mathbf{N}_A \cdot \mathbf{e}_x = P_{AS} p_0 \frac{y_{A0} - y_{Ae}}{e}$$

- Montrez que le débit molaire $\dot{n}_A$ traversant le film peut être écrit par une loi analogue à la loi d'Ohm, où y_A remplace la tension.

Les questions suivantes, de culture générale et de réflexion sur l'hypothèse $x_A \ll 1$, sont optionnelles.

- L'unité classique (et très fumeuse) pour la perméabilité est le barrer (du nom du premier scientifique qui a exploré la diffusion des gaz dans les solides). On donne :

$$1 \text{ barrer} = 10^{-10} \frac{\text{cm}_{\text{STP}}^3 \text{cm}}{\text{cm}^2 \text{s cm}_{\text{Hg}}}$$

où le cm_{STP}^3 est en fait une quantité de matière : c'est le nombre de moles contenu dans 1 cm^3 de gaz parfait dans les conditions standard de pression (1 atm) et de température (0°C). Le cm_{Hg} est la pression exercée par une colonne de 1 cm de mercure ($=1333 \text{ Pa}$).

Combien vaut 1 barrer en unités SI ?

- e) Quelle est l'ordre de grandeur du rapport de la concentration en A dans le solide et de celle dans le mélange gazeux ? Exprimez ce rapport et déduisez-en une valeur maximale pour S_{AS} à température ambiante.
- f) Quelle condition sur la solubilité S_{AS} impose la condition $x_A \ll 1$? En vous basant sur des ordres de grandeur raisonnables, est-ce forcément toujours vérifié même à pression atmosphérique ?

Exercice 5.6 : Emballage de médicament

Les gélules pharmaceutiques sont emballées sous atmosphère inerte (ici du di-azote, mais ce peut être aussi de l'argon) et conservées dans un emballage (appelé « blister »), afin de les protéger de l'oxydation par l'oxygène de l'air (et aussi de l'humidité). Le blister est composé de cavités plastiques thermoformées qui contiennent les gélules, sur lesquelles on scelle un film composite à base d'aluminium destiné à être cassé par l'utilisateur.

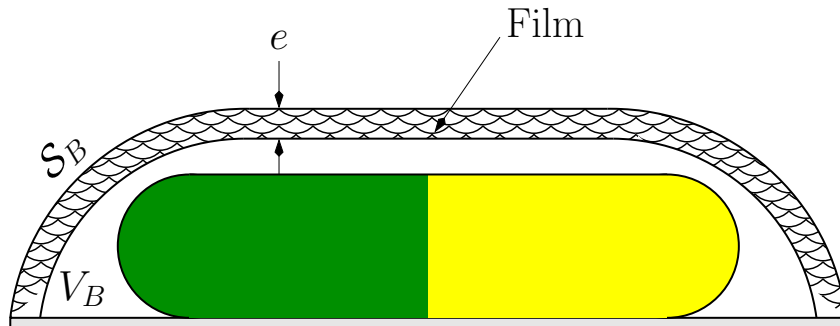


On suppose que le danger principal pour la conservation du principe actif dans la gélule est l'oxygène diffusant à travers le plastique depuis l'atmosphère. On cherche le temps caractéristique pour que l'air autour de la gélule redevienne proche de l'air atmosphérique.

Hypothèses :

- la pression est la pression atmosphérique et la température est la température ambiante partout.
- l'air autour du blister est immobile et homogène.
- le mélange gazeux autour de la gélule est homogène et est initialement du di-azote pur.
- le di-azote ne diffuse pas dans le film.

- la diffusion de l'oxygène dans le film peut-être considérée comme quasi-stationnaire.



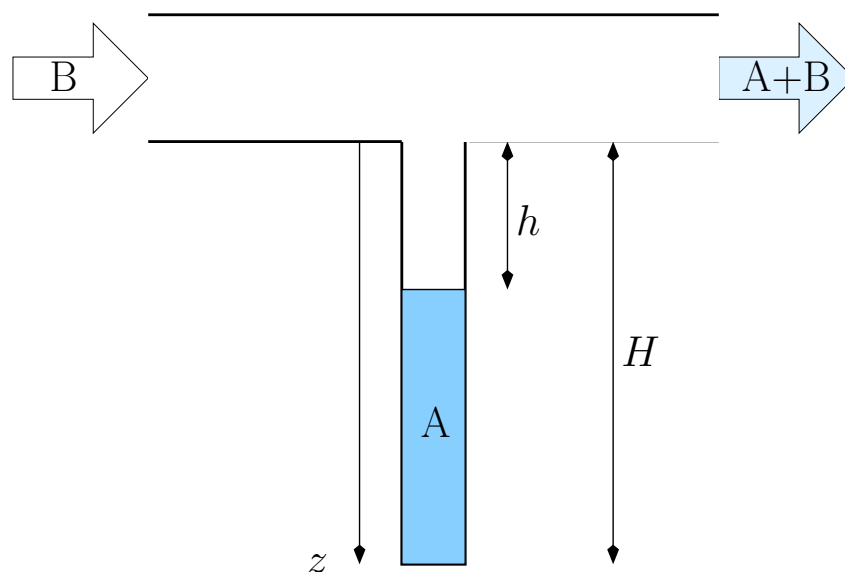
Données : le plastique est du PVC, couramment employé dans les blisters.

Épaisseur plastique	$e = 12 \text{ mil (1 mil = 1 inch / 1000)}$
Perméabilité PVC à O_2	$P_{O_2,S} = 3.1 \times 10^{-17} \text{ mol m}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ Pa}^{-1}$
Volume autour de la gélule	$V_B = S_B \times 1.2 \text{ mm}$

- En utilisant les résultats de l'exercice précédent, exprimez le débit molaire de di-oxygène entrant dans le blister. On notera $y(t)$ la fraction molaire de di-oxygène dans le gaz autour de la gélule à l'instant t et y_0 la fraction molaire de di-oxygène dans l'air ambiant.
- En déduire une équation différentielle donnant la fraction molaire de di-oxygène dans le volume gazeux V_B autour de la gélule. On fera apparaître un temps caractéristique τ en fonction des données du problème et on le calculera.
- En déduire au bout de combien de temps la fraction molaire de di-oxygène autour de la gélule atteint 95 % de sa valeur dans l'air ambiant.

Exercice 5.7 : Tube de Stefan

Le tube de Stefan est un appareil permettant de mesurer des coefficients de diffusion gaz/gaz.



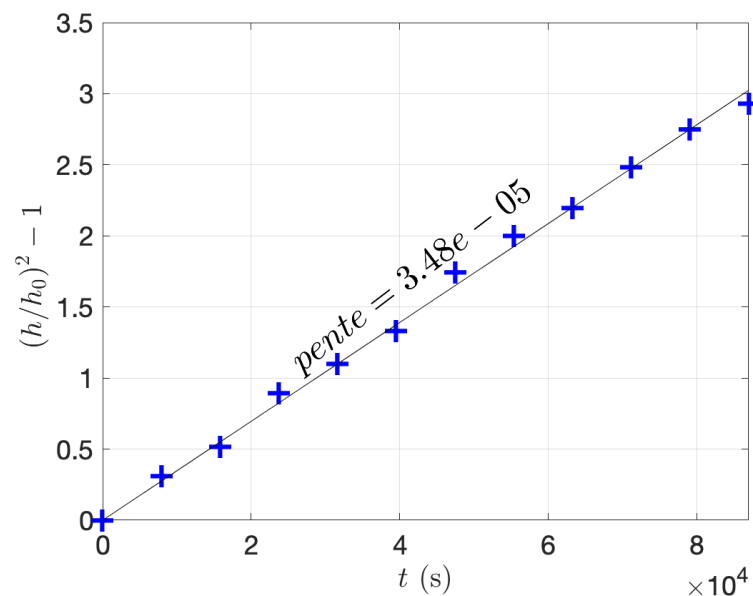
On remplit un tube capillaire de hauteur H avec un liquide volatile dont la vapeur sera notée A. On note h la hauteur de la partie du capillaire au-dessus du liquide. La partie supérieure du tube est connectée à une conduite dans laquelle circule un gaz pur B. La vapeur de A au niveau de la surface du liquide est en équilibre avec ce dernier et sa pression partielle est donc la pression de vapeur saturante. Dans le tube horizontal il n'y a pas de A. Par diffusion la vapeur va donc monter dans le capillaire à travers B et être emmenée par l'écoulement.

On suppose :

- le gaz B totalement insoluble dans le liquide et ne réagit pas avec la vapeur A.
 - tous les transferts se font verticalement.
 - la température du liquide est maintenue constante
 - le niveau du liquide descend suffisamment lentement pour supposer la diffusion stationnaire.
 - le capillaire est suffisamment fin pour qu'il n'y ait pas de convection liée à l'écoulement de B d'une part, et que les transferts diffusifs soient verticaux d'autre part.
- a) En utilisant la loi de Fick, rappelez la relation reliant les densités de flux molaires totales $\mathbf{N}_A$, $\mathbf{N}_B$ et la fraction molaire x_A .
 - b) Que vaut $\mathbf{N}_B$ dans le cas présent ? Justifiez. En déduire l'expression du flux molaire $\mathbf{N}_A$ en fonction de x_A .
 - c) Écrire l'équation de conservation de l'espèce A.
 - d) Écrire les conditions aux limites en $z = 0$ et $z = h$.
 - e) Résoudre le problème et donnez l'expression $x_A(z)$, fraction molaire en A en fonction de z , puis l'expression du flux molaire de A en $z = h$.
 - f) En écrivant la conservation de la masse du liquide, trouvez une équation différentielle sur $h(t)$ et résolvez-la pour trouver la loi de variation de la hauteur h en fonction du temps.

Comment procède-t-on pour mesurer le coefficient de diffusion avec cet appareil ?

- g) Application : on réalise l'expérience à température et pression ambiante avec du chloroforme, le gaz de balayage étant de l'air, avec une hauteur $h_0 = 2$ cm. On obtient les points suivants :



Déduisez-en le coefficient de diffusion du chloroforme dans l'air.

Données du chloroforme à 20 °C :

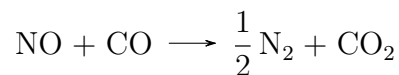
Masse volumique liquide : 1489 kg m⁻³

Pression de vapeur saturante : 21.2 kPa

Masse molaire : 119.4 g mol⁻¹

Exercice 5.8 : Pot catalytique

L'oxyde d'azote (NO) issu des gaz de combustion dans les moteurs est réduit grâce à une réaction catalytique en surface, qu'on peut noter :



Pour cela on fait passer les gaz d'échappement sur une surface, et la vitesse de la réaction est donnée par $R_{\text{NO}} = -kC_{\text{NO},s}$ où $C_{\text{NO},s}$ est la concentration en NO au niveau de la surface. On suppose que NO atteint la surface par diffusion à travers un film d'épaisseur δ formé par les gaz d'échappement.

On suppose que les gaz sortent du moteur à 500 °C et 1.2 bar, avec une fraction molaire de NO de 0.15. On donne la diffusivité de NO dans le mélange $D = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, la

constante de réaction $k = 0.05 \text{ m s}^{-1}$ et une épaisseur de film $\delta = 1 \text{ mm}$. On supposera² que $x_{\text{NO}} \ll 1$, et que le mouvement dans la direction perpendiculaire à la surface est négligeable.

- Écrire le problème de diffusion avec les conditions aux limites adéquates.
- Le résoudre et calculer la fraction molaire de NO au niveau de la surface
- Calculez le taux de conversion de NO par unité de surface.

Exercice 5.9 : Respiration d'une paroi vivante

La respiration est un processus de transfert d'oxygène entre l'air et le sang qui irrigue les vaisseaux dans les poumons. On assimile la paroi des poumons (milieu B) à un mur fini d'épaisseur e dans lequel l'oxygène (milieu A) est transféré par diffusion.

La paroi consomme de l'oxygène pour son propre métabolisme suivant une réaction chimique homogène d'ordre zéro ($R_A = -k_0$).

La concentration en oxygène en $z = 0$ (surface de la paroi en contact avec l'air) est C_{A_0} . La concentration en oxygène en $z = e$ (surface de la paroi en contact avec le sang) est C_{A_e} . On suppose $C_{A_e} < C_{A_0} \ll C$, où C est la concentration totale de matière dans la paroi des poumons.

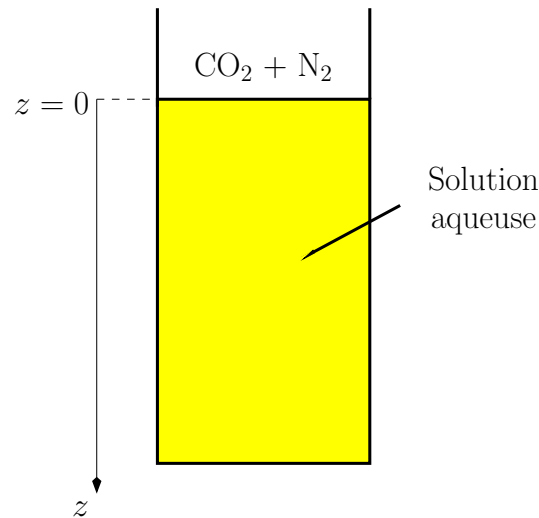
- En supposant le coefficient de diffusion D_{AB} constant, déterminer l'expression du champ de concentration $C_A(z)$ dans la paroi. On justifiera toutes les hypothèses.
- Écrire le résultat sous forme adimensionnelle (on fera intervenir l'écart $C_A - C_{A_e}$). Interprétez le nombre adimensionnel obtenu comme un rapport de deux temps caractéristiques.
- Sous quelle condition sur le nombre adimensionnel trouvé précédemment le profil de concentration admet-t-il un minimum à l'intérieur de la paroi pulmonaire ? Analysez la situation selon que cette condition est vérifiée ou non.
- Donner l'expression de la densité de flux molaire d'oxygène transmise au sang. Quel est l'effet de la réaction chimique ?

Exercice 5.10 : Dissolution du CO2 dans une solution de carbonate de sodium

Une solution aqueuse de carbonate de sodium est mise en présence d'un mélange gazeux de CO2 et d'azote. Le CO2 dissous diffuse dans l'eau et réagit avec le carbonate en produisant du bicarbonate de sodium, selon la réaction d'ordre 1 et de constante de réaction k_1 :



2. bien que ce ne soit pas totalement justifié ici



On note D le coefficient de diffusion du CO_2 dans l'eau, supposé constant. On rappelle que la concentration en CO_2 dissous à la surface suit la loi de Henry :

$$C_{\text{CO}_2} = k_H p_{\text{CO}_2},$$

où p_{CO_2} est la pression partielle en CO_2 au-dessus du liquide.

Données numériques :

Pression atmosphérique	p_0	101 325 Pa
Température ambiante	T_0	298 K
Fraction molaire de CO_2 dans le gaz	y_{CO_2}	10^{-3}
Coefficient de diffusion à 298 K	D	$1.58 \times 10^{-9} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
Constante de la réaction à 298 K	k	$5 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$
Constante de Henry à 298 K	k_H	$3.91 \times 10^{-4} \text{ mol m}^{-3} \text{ Pa}^{-1}$

- En calculant la fraction molaire de CO_2 à la surface, justifiez que la solution est très diluée en CO_2 dissous.
- Écrire l'équation de conservation du CO_2 dans l'eau en régime permanent, puis, en supposant un transfert unidimensionnel suivant z , donner l'expression de l'équation différentielle qui permettra de déterminer la concentration en fonction de z .
- Donner les deux conditions en limites :
 - à la surface de l'eau,
 - en $z = +\infty$, en supposant que la profondeur du récipient est suffisamment grande devant la dimension caractéristique des transferts diffusifs.
- Résoudre le problème et en déduire le profil de concentration en CO_2 dans le récipient en régime permanent.
Représentez ce profil et indiquer l'ordre de grandeur de l'épaisseur δ dans laquelle a lieu la réaction.

Exercice 5.11 : Diffusion/réaction d'un antibiotique dans un biofilm

Les biofilms sont constitués par des colonies de bactéries, provoquant potentiellement des pathologies. Ils sont souvent difficiles à éliminer.

On considère ici un biofilm d'épaisseur e sur l'épiderme, que l'on traite par un antibiotique déposé à la surface (concentration $C_{A_0} = 4 \text{ mol m}^{-3}$). Ce dernier diffuse dans le biofilm (coefficient $D = 2 \times 10^{-12} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$) et y est consommé par une réaction d'ordre 1 (constante $k = 0.1 \text{ s}^{-1}$).

- a) Calculez le champ de concentration en antibiotique dans le biofilm. On supposera que la fraction molaire en antibiotique est $\ll 1$ et que la surface de l'épiderme est imperméable à l'antibiotique. En déduire le taux de consommation du biofilm en chaque point.
- b) Pour que le biofilm soit totalement éradiqué à terme, le taux de mortalité doit être partout supérieur à $0.2 \text{ mol s}^{-1} \text{ m}^{-3}$, pour compenser le taux de reproduction des bactéries.

Calculez l'épaisseur maximale que l'antibiotique pourra traiter.

Exercice 5.12 : Séchage d'une nappe d'eau

L'ouverture accidentelle d'une vanne provoque la formation sur un sol plat non poreux d'une nappe d'eau de 1 mm d'épaisseur et de 2 m de largeur sur 4 m de longueur. La température ambiante est de 25°C et la pression de 1 bar. L'humidité relative de l'air ambiant est $\psi = 35\%$.

La diffusivité de la vapeur d'eau dans l'air est $D_{AV} = 2.56 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. La pression de vapeur saturante de l'eau à 25°C est $p_{\text{sat}}(25^\circ\text{C}) = 3142 \text{ Pa}$

- a) Si un vent moyen de 3 m s^{-1} balaye la surface de la nappe dans le sens de la largeur, calculer le débit massique d'eau évaporée par m^2 de nappe.
En déduire le temps d'évaporation totale de la nappe.
- b) *Question de réflexion* : on évapore de l'eau, et pour ça il faut fournir de l'énergie... Qu'a-t-on négligé dans le traitement du problème ? La surface de l'eau est-elle vraiment à T_∞ ? Avons-nous sous-estimé ou surestimé le temps de disparition de la nappe ?
- c) (*note : cette question nécessite un cours sur les transferts instationnaires...*)
Reprendre le calcul en l'absence de vent, où l'eau s'évapore par diffusion pure.

Exercice 5.13 : Séchage de spaghettis

Un procédé artisanal de séchage de spaghettis consiste à étaler les spaghettis humides sur une grille horizontale, dont on supposera que la présence n'influence pas le problème. Les spaghettis sont bien séparés les uns des autres ; on souffle de l'air du bas vers le haut à travers l'ensemble. On suppose que tout se passe à une température de l'ordre de 25 °C.

Le diamètre de chaque spaghetti est de 2 mm et la longueur de 300 mm ; la vitesse de l'écoulement d'air libre est de 10 m s⁻¹

- Quelle est la dimension caractéristique de ce problème de séchage convectif ? Calculer le nombre de Reynolds relatif à cette dimension.
- Représenter un des spaghettis dans une coupe perpendiculaire à son axe, la couche limite massique, et illustrer l'écoulement d'air en aval.
- Donner la corrélation adaptée au calcul du coefficient de transfert de matière moyen à la surface du spaghetti. Le calculer.
- À la surface d'un spaghetti l'air est saturé en vapeur d'eau. L'air soufflé a une humidité relative de 30 % .
Donner l'expression littérale puis calculer le débit massique d'eau arraché à chaque spaghetti.

Données :

Coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air : $D_{AV} = 2.56 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

Pression de vapeur saturante de l'eau à 25 °C : $p_{\text{sat}}(25 \text{ °C}) = 3142 \text{ Pa}$

Exercice 5.14 : Électrode tournante en électrochimie

Pour représenter le transfert de matière par convection autour d'une électrode tournante en électrochimie, on utilise souvent la relation :

$$J_{\text{el}} = 0.62 \omega^{1/2} \nu^{-1/6} D^{2/3} (C_{\text{el}} - C_{\infty})$$

(les électrochimistes détestent les nombres adimensionnels :-)) Écrivez cette corrélation sous une forme adimensionnelle.

Exercice 5.15 : Séchage de bûches de bois

Un vendeur de bois de chauffage empile des bûches de diamètre $d = 20 \text{ cm}$ et de longueur $L = 50 \text{ cm}$ pour les faire sécher. Comme il est malin, il les place perpendiculairement au sens du vent dominant dans le coin.

Il vous demande d'estimer le temps nécessaire pour que l'humidité (base sèche) des bûches passe de 50 % à 20 %, pour laquelle elles pourront être utilisées comme bois de chauffage.

L'humidité (base sèche) est définie par :

$$\phi = \frac{m_{\text{eau}}}{m_{\text{bois sec}}}$$

La masse volumique des bûches à 20 % d'humidité est $\rho_{20} = 450 \text{ kg m}^{-3}$



On fera les calculs dans deux conditions typiques de l'hiver et de l'été, avec un vent moyen de 8.6 km h^{-1} dans les deux cas. On donne :

Saison	Température $T_{\infty} \text{ (}^{\circ}\text{C)}$	Humidité relative $\psi_{\infty} \text{ (%)}$	Pression de vapeur sat. $p_{\text{sat}}(T_{\infty}) \text{ (Pa)}$
Hiver	8	80	1061
Été	30	60	4211

On pourra utiliser, en l'adaptant, la corrélation de transfert thermique pour un écoulement perpendiculaire à un empilement de cylindres :

$$\text{Nu}_d = c_h \text{Pr}^{1/3} \text{Re}^{0.6} \quad (1)$$

où le coefficient c_h dépend de la géométrie de l'empilement et est donné par l'abaque Fig. 5a. On suppose que l'empilement des bûches correspond en gros à $\bar{x} = 0.75$ et $\bar{x}_t = 1.6$ (Fig. 5b).

- Calculez la masse d'eau à éliminer par bûche.
- Calculez les propriétés physiques μ , ρ , ν et D_{AV} aux températures indiquées, puis le coefficient de transfert de matière entre les bûches et l'air ambiant dans les deux cas.

On donne pour la viscosité dynamique de l'air (en négligeant l'effet de la vapeur) :

$$\frac{\mu}{10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}} = 0.88848 t^3 - 3.2398 t^2 + 6.2657 t + 0.23543 \quad \text{où} \quad t = \frac{T}{1000 \text{ K}}$$

- Calculez le débit massique d'eau sortant d'une bûche.
- En déduire le temps de séchage. Le résultat vous paraît-il réaliste ? Si non, d'où vient le problème ? Quelle situation peut représenter le calcul fait dans cet exercice ?

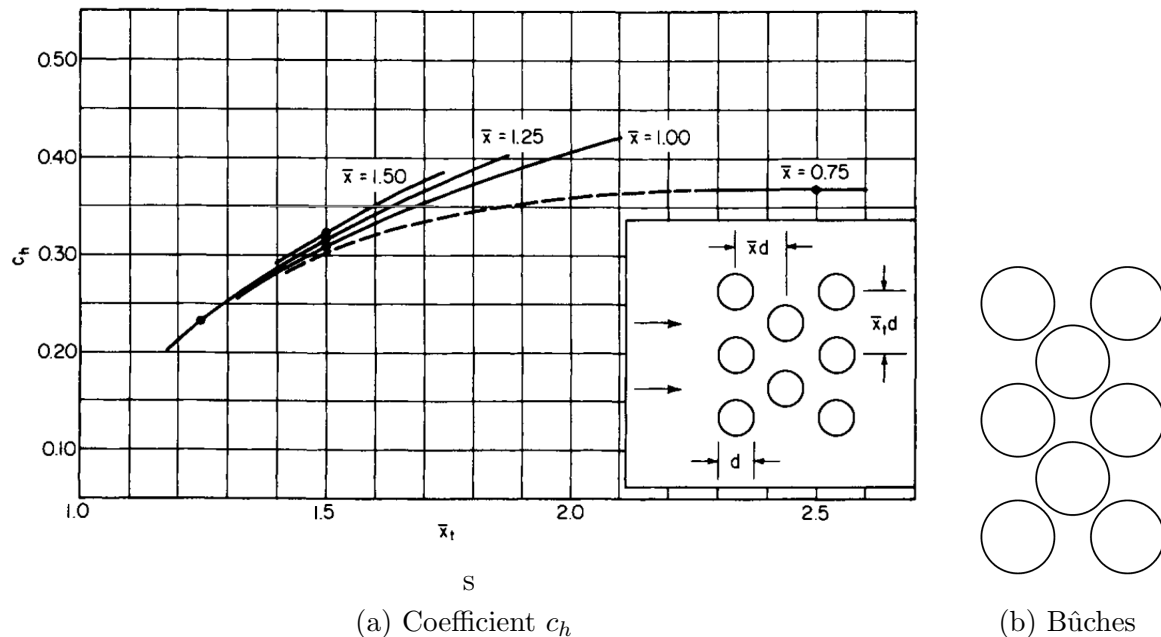


FIGURE 5 – (a) Coefficient c_h de la corrélation (1) (**RohsenowHartnett1998handbook**). Les notations sont indiquées sur la figure. (b) Empilement des bûches

Exercice 5.16 : Transfert de matière à l'intérieur d'un tube

De l'air à pression atmosphérique et à 25 °C, chargé d'une faible quantité d'iode, s'écoule à $U = 5.18 \text{ m s}^{-1}$ dans un tube poreux de diamètre intérieur $D = 3.05 \times 10^{-2} \text{ m}$.

- Déterminer le coefficient de transfert de matière (d'iode) entre le fluide et la paroi.
- Si C_m est la concentration moyenne en iode dans l'air s'écoulant à l'intérieur du tube, déterminer la densité de flux d'iode déposé à la paroi, en supposant que celle-ci est un puits parfait pour l'iode.

Données : $D_{\text{air-iode}} = 8.34 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ à 25 °C et 1 atm. $C_m = 1 \text{ mol m}^{-3}$

- Représenter un schéma électrique équivalent pour le transfert d'iode de l'air vers l'ambiance extérieure. Calculer la résistance que présente la convection à l'intérieur du tube au transfert d'iode pour 10 cm de longueur de tube.

Remarque : par analogie au transfert de chaleur, on définit la résistance convective au transfert de matière $\mathcal{R} = 1/(k_m S)$.

Exercice 5.17 : Dépôt de palladium par convection/réaction en surface

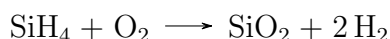
Pour fabriquer un tube en composite de palladium destiné à l'ultra-purification de l'hydrogène, on injecte un gaz porteur contenant une très faible quantité de palladium à l'entrée d'un tube aux parois poreuses. Sur les parois, le palladium se dépose dans les pores du solide selon la réaction chimique équivalente $\text{Pd}_{\text{vap,surface}} \rightarrow \text{Pd}_s$

Le débit de gaz est $\dot{m}$ et la concentration massique en Pd à l'entrée est $\rho_{A,\text{in}}$. On suppose un coefficient de transfert convectif k_m entre le flux gazeux et la surface interne du tube constant le long du tube. On note $\rho_A(x)$ la concentration massique en palladium dans le gaz au coeur de l'écoulement à une distance x de l'entrée du tube et $\rho_{A,S}(x)$ la concentration massique dans le gaz au niveau de la surface. La vitesse de dépôt en surface (en $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$) est supposée de la forme $r_A = -k_r \rho_{A,S}$.

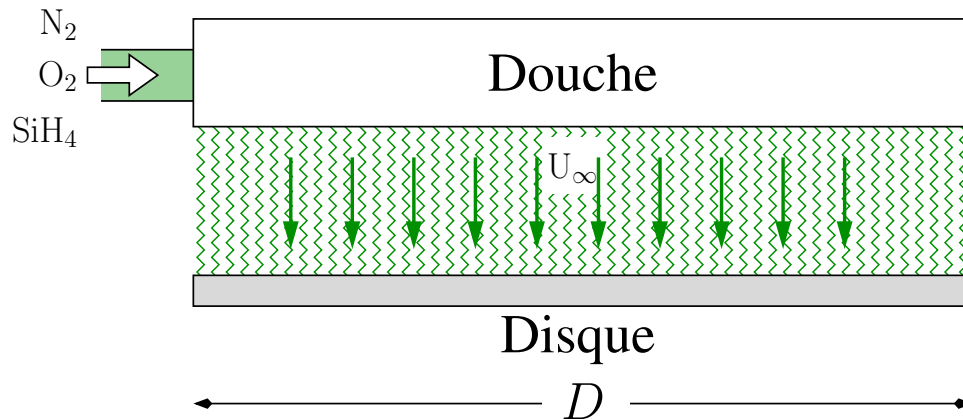
- a) Quelles sont les unités de k_m et k_r ?
- b) Justifiez qu'en régime permanent, dans tout plan situé à la distance x de l'entrée du tube, on a $\mathbf{n}_A \cdot \mathbf{e}_r = r_A$, où $\mathbf{n}_A$ est la densité de flux massique entre l'écoulement et la surface, et $\mathbf{e}_r$ le vecteur unitaire radial.
En déduire une relation entre $\rho_A(x)$ et $\rho_{A,S}(x)$. Interprétez le résultat dans les deux cas extrêmes :
 - La réaction est très lente devant le transfert.
 - Le transfert est très lent devant la réaction,
- c) En faisant un bilan de masse du palladium sur une tranche de cylindre de longueur dx , établir une équation différentielle donnant la concentration $\rho_A(x)$ et la résoudre. On exprimera la longueur caractéristique $\mathcal{L}$ intervenant cette équation en fonction des données du problème.
- d) On veut que le dépôt de palladium ne varie pas de plus de 20 % le long du tube. Quelle est la longueur maximale que doit avoir ce dernier ?
- e) Ré-interprétez la question 5.17.2 en traçant un schéma électrique équivalent.

Exercice 5.18 : Dépôt de silice par CVD

On veut déposer une couche de silice SiO_2 solide sur un disque de diamètre D , à partir de silane SiH_4 gazeux selon la réaction :



Pour cela on envoie un flux gazeux à basse pression p et haute température T , composé d'azote, d'oxygène et de silane, perpendiculairement au disque à travers d'un « pommeau de douche » de même diamètre, composé de petits trous de diamètre d à raison de σ trous par unité de surface. La réaction n'a lieu qu'à la surface du solide.



On impose le débit molaire total de gaz $\dot{n}$. Les fractions molaires des différents gaz sont :

i	N_2	O_2	SiH_4
x_i (%)	73	25.5	1.5

L'oxygène étant en excès, on pourra considérer que la réaction est d'ordre 1 par rapport au silane. On note k_r la constante de réaction de surface.

Données :

Débit molaire gaz	$\dot{n} = 700 \text{ sccm}^{(*)}$
Pression	$p = 1000 \text{ Pa}$
Température	$T = 400 \text{ K}$
Coefficient de diffusion	$D_{AB} = 2.70 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
Viscosité cinématique	$\nu = 2.60 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
Diamètre plaque	$D = 30 \text{ cm}$
Densité de trous	$\sigma = 15\,000 \text{ trous/m}^2$
Diamètre trous	$d = 1 \text{ mm}$
Constante de vitesse de réaction de surface	$k_r = 4 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$
Masse volumique du solide déposé	$\rho_S = 2648 \text{ kg m}^{-3}$
Masse molaire du solide déposé	$M_S = 60.1 \text{ g mol}^{-1}$

(*) L'unité sccm signifie "Standard Cubic Centimeter per Minute" et vaut :

$$1 \text{ sccm} = 7.4364 \times 10^{-7} \text{ mol s}^{-1}$$

- a) En supposant un mélange de gaz parfaits, calculez le débit volumique $\dot{V}$.
En déduire que la vitesse U_∞ en sortie du pommeau de douche peut s'écrire :

$$U_\infty = \frac{\dot{n}RT}{p} \frac{1}{\sigma \left(\frac{\pi}{4} Dd\right)^2}$$

- b) Calculez le coefficient d'échange convectif k_m entre l'écoulement incident et la surface de la plaque. Pour un écoulement perpendiculaire à une plaque, on connaît la corrélation en thermique :

$$\text{Nu}_D = 0.232 \text{Re}_D^{0.731} \text{Pr}^{0.35}$$

- c) Calculez la concentration en Silane dans l'écoulement, puis celle à la paroi. En déduire la vitesse d'apparition du solide en $\text{mol m}^{-2} \text{s}^{-1}$.
- d) En déduire la vitesse de croissance de l'épaisseur de la couche en nm s^{-1} .

Exercice 5.19 : Diffusion / réaction homogène en sphériques

Une particule sphérique solide de rayon R est en suspension dans l'eau et se dissout partiellement. Le composé aqueux réagit avec l'eau selon une réaction $A \rightarrow C$ du premier ordre par rapport à A . On note C_{A0} la solubilité de A dans l'eau et k la constante de réaction. On suppose que les espèces A et C diffusent dans l'eau comme si elles étaient seules, et on note D_A et D_C leur coefficients de diffusion respectifs dans l'eau.

- a) Quelle valeur max doit avoir C_{A0} pour qu'on puisse supposer $x_A \ll 1$? On supposera désormais cette condition vérifiée.
- b) Écrire les équations du problème.
- c) Écrivez la solution et calculez le champ de concentration en A .
Note : on montre que la solution du problème différentiel

$$(r^2 u')' - \alpha^2 r^2 u = 0 \quad u(r \rightarrow +\infty) = 0$$

s'écrit :

$$u(r) = A \frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

où A est une constante indéterminée.

- d) En déduire la valeur de la densité de flux de A et exprimez le en $r = R$.
- e) En remarquant que $\text{div}(\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_C) = 0$, et en supposant que le solide est imperméable à l'espèce C , déduisez-en $C_C(r)$ par intégration. Commentez le résultat.

6 Transferts avec changement de phase

Exercice 6.1 : Problème de solidification d'un liquide sous-refroidi (une seule phase)

Reprendre la méthode utilisée dans l'exercice du cours pour le problème suivant : un liquide semi-infini est initialement à une température T_0 inférieure à la température de

fusion T_F (il est sous-refroidi). On suppose que la solidification démarre en $x = 0$ à $t = 0$ et que la température du solide est uniforme à la température de fusion T_F .

Montrez notamment que la solution obtenue est quasiment identique au problème de fusion en remplaçant la fonction erf par la fonction erfc.

$$\frac{T_L(x, t) - T_0}{T_F - T_0} = \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_L t}}\right)}{\operatorname{erfc}\sigma}, \quad \sigma = \frac{s(t)}{2\sqrt{a_L t}}$$

Exercice 6.2 : Problème de solidification d'un liquide (deux phases)

Un liquide semi-infini est initialement à une température T_0 supérieure à la température de fusion T_F . On applique une température T_P inférieure à T_F sur la face en $x = 0$.

- a) Écrire les équations du problème.
- b) On cherche des solutions de la forme $T_{S,L} - T_F = f_{S,L}(\eta_{S,L})$ où :

$$\eta_i = \frac{x}{2\sqrt{a_i t}}, \quad i = S, L$$

Montrer à partir de l'équation de la chaleur que les fonctions f_L et f_S sont solutions de l'équation différentielle :

$$f'' + 2\eta f'(\eta) = 0$$

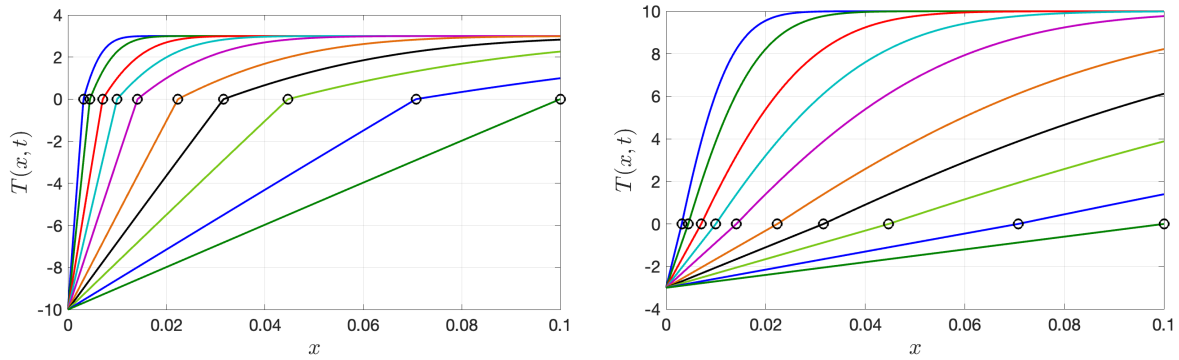
- c) Montrez que la solution de cette équation s'écrit :

$$f(\eta) = K \operatorname{erf}(\eta) + L$$

- d) En déduire les expressions des profils de températures dans le liquide et dans le solide à des constantes multiplicatives près. On pourra poser :

$$\sigma = \frac{s(t)}{2\sqrt{a_S t}}$$

- e) Exprimer la condition en $x \rightarrow +\infty$ et en déduire :
 - que la vitesse du front varie en $\sqrt{t}$,
 - l'expression finale de la température dans le liquide.
- f) Exprimer la condition en $x = 0$ et en déduire l'expression finale du champ de température dans le solide.
- g) Exprimer enfin la condition de flux à l'interface liquide/solide et en déduire que la constante σ doit vérifier une équation implicite faisant intervenir le nombre de Stefan dans le solide, le rapport des diffusivités thermiques $A = a_S/a_L$, et le rapport des effusivités thermiques $E = \sqrt{\lambda_L c_{pL}/\lambda_S c_{pS}}$.



(a) $T_0 = 3^\circ\text{C}$, $T_P = -10^\circ\text{C}$, $\text{Ste} = 5.77 \times 10^{-2}$ (b) $T_0 = 10^\circ\text{C}$, $T_P = -3^\circ\text{C}$, $\text{Ste} = 1.73 \times 10^{-2}$

FIGURE 6 – Solidification d'eau liquide. Profils de température au cours du temps, pour $t = 0.001 t_D$, $0.002 t_D$, $0.005 t_D$, $0.01 t_D$, $0.02 t_D$, $0.05 t_D$, $0.1 t_D$, $0.2 t_D$, $0.5 t_D$, t_D , où $t_D = (\ell/\sigma)^2/4a$, pour deux jeux de températures initiale/de paroi différents. Les cercles représentent la position du front de solidification.

h) Que deviennent les résultats dans la limite quasi-statique ?

Note : on doit obtenir :

$$\frac{T_S(x, t) - T_P}{T_F - T_P} = \frac{\text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_S t}}\right)}{\text{erf} \sigma}, \quad \sigma = \frac{s(t)}{2\sqrt{a_L t}}$$

$$\frac{T_L(x, t) - T_0}{T_F - T_0} = \frac{\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_L t}}\right)}{\text{erfc}\left[\sigma \left(\frac{a_S}{a_L}\right)^{1/2}\right]},$$

Exercice 6.3 : Problème de solidification d'un liquide cylindrique par un puit de chaleur linéaire (deux phases)

Un volume de liquide infini est initialement à une température T_0 supérieure à la température de fusion T_F . Un tube infiniment mince et infiniment long prélève de la chaleur au liquide à partir de l'instant $t = 0$. On notera $\dot{Q}_0$ le flux prélevé par unité de longueur du tube.

- Écrire les équations du problème. On supposera le diamètre du tube égale à ϵ puis on prendra la limite $\epsilon \rightarrow 0$.
- On cherche des solutions de la forme $T_{S,L} - T_F = f_{S,L}(\eta_{S,L})$ où :

$$\eta_i = \frac{r}{2\sqrt{a_i t}}, \quad i = S, L$$

Montrer à partir de l'équation de la chaleur que les fonctions f_L et f_S sont solutions de l'équation différentielle :

$$(\eta f'(\eta))' + 2\eta^2 f'(\eta) = 0$$

c) (*Optionnel. On pourra admettre le résultat*)

Montrez que la solution de cette équation s'écrit :

$$f(\eta) = K \operatorname{Ei}(-\eta^2) + L$$

Où Ei désigne la fonction exponentielle intégrale définie par :

$$\operatorname{Ei}(z) = \int_{-z}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

d) En déduire les expressions des profils de températures dans le liquide et dans le solide à des constantes multiplicatives près. On pourra poser :

$$\sigma = \frac{s(t)}{2\sqrt{a_S t}}$$

e) Exprimer la condition en $r \rightarrow +\infty$ et en déduire :

- que la vitesse du front varie en $\sqrt{t}$,
- l'expression finale de la température dans le liquide.

f) Exprimer la condition en $r \rightarrow 0$ et en déduire l'expression finale du champ de température dans le solide.

g) Exprimer enfin la condition de flux à l'interface liquide/solide et en déduire que la constante σ doit vérifier une équation implicite faisant intervenir des nombres de Stefan dans le liquide et dans le solide, ainsi que le rapport des diffusivités thermiques $A = a_S/a_L$.

7 Problèmes de synthèse

Exercice 7.1 : Séchage d'une nappe d'eau

L'ouverture accidentelle d'une vanne provoque la formation sur un sol plat non poreux d'une nappe d'eau de 1 mm d'épaisseur et de 2 m de largeur sur 4 m de longueur. La température ambiante est de 25 °C et la pression de 1 bar. L'humidité relative de l'air ambiant est $\psi = 35\%$.

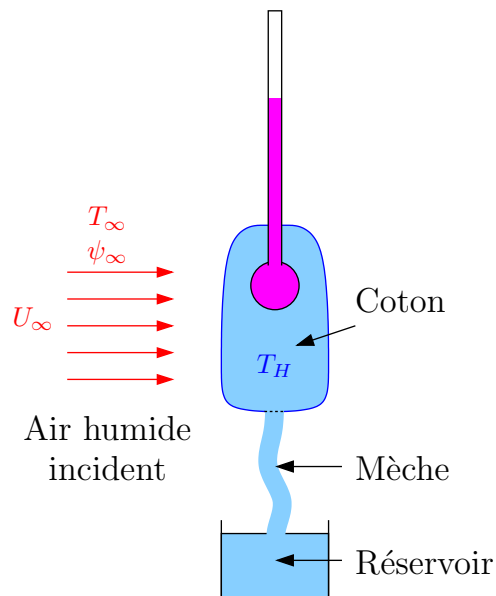
La diffusivité de la vapeur d'eau dans l'air est $D_{AV} = 2.56 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. La pression de vapeur saturante de l'eau à 25 °C est $p_{\text{sat}}(25^\circ\text{C}) = 3142 \text{ Pa}$

- a) Si un vent moyen de 3 m s^{-1} balaye la surface de la nappe dans le sens de la largeur, calculer le débit massique d'eau évaporée par m^2 de nappe.
En déduire le temps d'évaporation totale de la nappe.
- b) *Question de réflexion* : on évapore de l'eau, et pour ça il faut fournir de l'énergie... Qu'a-t-on négligé dans le traitement du problème ? La surface de l'eau est-elle vraiment à T_∞ ? Avons-nous sous-estimé ou surestimé le temps de disparition de la nappe ?
- c) (*note : cette question nécessite un cours sur les transferts instationnaires...*)
Reprendre le calcul en l'absence de vent, où l'eau s'évapore par diffusion pure.

Exercice 7.2 : Bulbe humide

Une méthode pour mesurer l'humidité de l'air est d'utiliser deux thermomètres :

- un premier, normal, nommé thermomètre sec, qui mesure la température de l'air T_∞ .
- un second, nommé thermomètre de bulbe humide : c'est un thermomètre dont le bulbe est entouré d'un tissu trempé d'eau, relié par une mèche poreuse à un réservoir d'eau. (voir figure ci-dessous). Il mesure la *température humide* T_H .



- a) Expliquez qualitativement pourquoi la température T_H mesurée par le thermomètre à bulbe humide est plus faible que celle de l'air de balayage.
Enumérez des exemples de la vie courante où l'on ressent ce phénomène.
- b) Ecrivez la conservation de la masse et le premier principe sur le coton entourant le thermomètre et donnez une relation entre le débit d'eau et la puissance calorifique reçue par le coton.
- c) On note ρ_{v_H} et ρ_{v_∞} les concentrations massiques en vapeur d'eau respectives à la surface du coton et dans l'air de balayage.

On suppose que le nombre de Nusselt s'exprime sous la forme :

$$\text{Nu} = f(\text{Re}) \times \text{Pr}^b \quad (2)$$

En utilisant l'analogie thermique / massique pour le transfert convectif, montrez que le rapport :

$$\frac{\rho_{v_H} - \rho_{v_\infty}}{T_\infty - T_H}$$

est indépendant de la vitesse de l'air de balayage, de la surface du bulbe et s'exprime uniquement en fonction du nombre de Lewis $\text{Le} = \text{Sc}/\text{Pr}$, de L_v , λ , D_{AB} et de l'exposant b .

A quelle température doit-on calculer les propriétés physiques ?

- d) En utilisant une corrélation connue de la forme (2), en déduire l'humidité relative ψ de l'air de balayage.

On rappelle la loi d'Antoine pour l'eau :

$$\log_{10} \frac{p_{\text{sat}}(T)}{1 \text{ bar}} = A - \frac{B}{T_{(K)} + C}$$

avec $A = 4.65430$, $B = 1435.264$, $C = -64.848$.

- e) On mesure une température sèche de 24.5°C et une température humide de 16.9°C . D'après la question précédente, quelle est l'humidité relative de l'air incident ?
On donne le coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air $D_{a,v} = 2.56 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. On assimilera le bulbe à un cylindre.
- f) On suppose que l'air humide arrive sur le thermomètre à 3 m s^{-1} . Le bulbe a pour dimensions $H = 1 \text{ cm} \times D = 4 \text{ mm}$.
Calculez la puissance échangée et le débit d'eau. En combien de temps un réservoir de 200 mL se vide-t-il ?
- g) Question de réflexion : peut-on congeler un produit humide (par exemple un aliment, un vaccin, ...) avec un air de balayage au-dessus de 0°C ?

Références

- WANG, Y., PENNER, L. A. & ORMISTON, S. J. (2000). "Analysis of laminar forced convection of air for crossflow in banks of staggered tubes". *Numerical Heat Transfer : Part A : Applications* 38 (8), p. 819-845.
- ŽUKAUSKAS, A. & ULINSKAS, R. (1985). "Efficiency parameters for heat transfer in tube banks". *Heat Transfer Engineering* 6 (1), p. 19-25.