

IMT Mines-Albi

Transferts avancés

Cours

O. LOUISNARD

Cette création est mise à disposition selon le Contrat :
Paternité - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification
2.0 France
disponible en ligne
[http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/)
ou par courrier postal à Creative Commons, 171 Second Street,
Suite 300, San Francisco, California 94105, USA.



Préambule

Ce polycopié est né du besoin de combler des lacunes liées à l'évolution des syllabus dans une école d'ingénieurs. C'était donc au départ un polycopié « bouche-trous » qui s'adressait à des étudiants connaissant essentiellement :

- les bases de la thermodynamique,
- les bases de mécanique des fluides,
- la thermique stationnaire,
- les résistances thermiques,
- le transfert de matière diffusif en stationnaire,
- le calcul des coefficients d'échanges convectifs par des corrélations.

Ce genre de polycopié-complément est déjà assez frustrant tant pour l'auteur que pour le lecteur. Au fil des années, j'ai également constaté que certains pré-requis étaient très mal compris par les étudiants. Un exemple : le transfert de matière, où les différentes hypothèses conduisant à $\mathbf{N}_A = -D_{AB} \mathbf{grad} C_A$ et l'équation de diffusion qui en résulte, sont toujours parachutées par les intervenants de TD à des étudiants sceptiques.

D'autre part, l'enseignement classique de la thermodynamique conduit les étudiants à manipuler des grandeurs sans bien comprendre ce qu'elles représentent. Combien de fois a-t-on entendu la question « *qu'est-ce que c'est au fond l'entropie ?* ». Mais aussi la fameuse énergie cinétique ajoutée à l'énergie interne dans le premier principe, qu'on néglige souvent sans bien savoir pourquoi dans les systèmes ouverts, la différence entre chaleur et travail, ou encore cette fameuse réversibilité dans laquelle la flèche du temps disparaît, mais ré-apparaît systématiquement en système ouvert puisqu'on y manipule des dérivées temporelles. Il me semble qu'une raison profonde en est la censure systématique des aspects microscopiques dans l'enseignement français de la thermodynamique. Certes cette dernière est faite pour en gommer les effets et raisonner sur des grandeurs à notre échelle, mais dans le cadre d'un transfert de connaissances, pourquoi s'en priver si une compréhension en profondeur s'en trouve facilitée ?

Le premier chapitre, à l'occasion de rappels, essaie de clarifier ces notions en s'appuyant sur des simulations « gadget » réalisées avec le logiciel libre Algodoo. Un gaz parfait est constitué de particules avec des collisions élastiques, faisons donc rebondir quelques centaines de boules élastiques les unes sur les autres, sur des cloisons mobiles ou non etc. Ces simulations ne prétendent pas s'élever à la hauteur de simulations de dynamique moléculaire, mais elle constituent un microscope grossier où l'on « voit » qualitativement la pression, l'énergie cinétique, l'énergie interne, la chaleur, le travail, la loi de Fourier, la loi de Fick, l'irréversibilité, et bien d'autres choses...¹ Bien sûr, le lecteur souhaitant approfondir ira consulter un cours de physique statistique, il en existe d'excellents en ligne.

1. Dans un cours de mécanique des fluides, on peut également illustrer la tension superficielle, la formule de Bernoulli, le théorème d'Euler et ses applications : la portance d'une aile, le principe

Ce premier chapitre essaie également de décloisonner les matières classiquement appelées respectivement « thermodynamique » et « transferts », souvent enseignées séparément. Le premier terme sous-entend en fait la thermodynamique à l'équilibre et le second la thermodynamique hors-équilibre, terme judicieux utilisé par les physiciens et bien plus fédérateur, qui décrit les flux engendrés par des gradients et explique (enfin !) les origines de l'irréversibilité. Les animations permettent de montrer clairement où s'arrête la première et où commence la seconde.

Les autres chapitres jouent plus précisément leur rôle « bouche-trou » et les thématiques abordées qui peuvent sembler disparates à juste titre constituent tout simplement un pansement sur leur abandon en première année d'école d'ingénieur. On espère que les bases consolidées à la lecture du premier chapitre permettront au lecteur de les aborder sereinement.

du coussin d'air... L'illustration des équilibres liquide-vapeur, de l'enthalpie et de l'entropie de réaction est en cours d'étude.

Sommaire

1	Rappels	9
1.1	Le premier principe	9
1.1.1	Introduction	9
1.1.2	Mouvement d'agitation microscopique	10
1.1.3	Énergie cinétique	11
1.1.4	Énergie interne et température	12
1.1.5	Chaleur et travail	15
1.2	Le second principe	16
1.2.1	Fondement et conséquences	16
1.2.2	Interprétation microscopique	17
1.2.3	Quelques probas (assez) simples	18
1.2.4	L'entropie	21
1.2.5	Variation de l'entropie avec l'énergie interne. Température	22
1.2.6	Retour au second principe	23
1.3	Systèmes hors-équilibre.	24
1.3.1	Qu'est-ce?	24
1.3.2	Équilibre local	24
1.3.3	Conduction de la chaleur	26
1.3.4	Équations locales de la conservation de l'énergie	26

1.4	Problèmes de conduction pure	28
1.4.1	Équation de la chaleur	28
1.4.2	Convection extérieure	28
1.4.3	Autres conditions aux frontières.	29
1.4.4	Condition initiale.	29
1.4.5	Simplification : régime permanent	30
1.4.6	Résistances thermiques.	30
1.4.7	Simplification : petits corps.	32
2	Ailettes. Quadripôles	35
2.1	Ailettes	36
2.1.1	Équation	36
2.1.2	Résistance thermique d'une ailette	38
2.1.3	Efficacité et rendement d'une ailette	40
2.1.4	Efficacité et rendement d'un système d'ailerres	42
2.2	Quadripôles en régime stationnaire	43
2.3	Quadripôles en régime instationnaire	45
3	Problèmes diffusifs instationnaires	47
3.1	Rappel des équations	47
3.1.1	Transfert de chaleur	47
3.1.2	Transfert de matière	48
3.2	Résolution analytique milieu semi-infini	49
3.2.1	Transformée de Laplace	49
3.2.2	Exemple du mur semi-infini	50
3.2.3	Longueur/temps de diffusion	52
3.2.4	Flux. Effusivité thermique	54

SOMMAIRE

3.2.5	Contact thermique.	56
3.2.6	Validité de l'hypothèse milieu semi-infini.	57
3.2.7	Exemple en transfert de matière	57
3.3	Milieux finis	58
3.3.1	Conditions aux frontières constantes.	58
3.3.2	Conditions aux frontières oscillantes.	63
3.3.3	Hypothèse quasi-stationnaire	65
4	Air humide	67
4.1	Introduction. Définition	67
4.1.1	Rappel : mélange de gaz	67
4.1.2	Rappel : équilibre liquide vapeur	68
4.2	Équations de l'air humide	68
4.2.1	Humidité et grandeurs liées	69
4.2.2	Volume spécifique. Densité	70
4.2.3	Énergie	71
4.2.4	Température de saturation adiabatique	72
4.2.5	Synthèse. Formulaire	75
4.3	Diagramme de l'air humide	75
4.3.1	Principe	75
4.3.2	Structure	76
4.3.3	Utilisation	76
5	Transferts avec changement de phase	81
5.1	Problèmes avec fronts mobiles.	81
5.1.1	Conservation de l'énergie à l'interface	81
5.1.2	Problème de Stefan : liquéfaction	84

5.1.3	Hypothèse quasi-stationnaire	85
5.2	Transferts avec condensation.	88
5.2.1	Condensation en film sur paroi verticale (solution de Nusselt)	88
5.2.2	Condensation sur un tube horizontal	91
5.2.3	Condensation sur un fagot de tubes	92
5.2.4	Condensation en gouttes	93
5.3	Transferts avec ébullition.	93
A	Transformées de Laplace	95
A.1	Définition	95
A.2	Utilité	95
A.3	Propriétés	96
A.4	Transformées inverses	97
A.4.1	Transformées inverses classiques	97
A.4.2	Transformées inverses utiles pour les problèmes en milieu semi- infini	98
B	Fonctions erreur	99

Chapitre 1

Rappels de thermodynamique et de transfert thermique

Ce rappel de cours emploie beaucoup à l'excellent cours de thermodynamique de Julien Bobroff Bobroff (2009) au sein du Magistère de Physique d'Orsay.

1.1 Le premier principe

1.1.1 Introduction

Le premier principe stipule que l'énergie est conservée et qu'elle ne peut qu'être convertie d'une forme à une autre. En système fermé, on écrit :

$$\Delta(U + K) = W + Q$$

Il convient de bien comprendre en premier lieu ce que sont l'énergie cinétique K et l'énergie interne U d'une quantité de matière macroscopique, ainsi que le travail W et la chaleur Q qu'elle échange avec son extérieur¹.

1. Ce principe a beau être en général connu dans son énoncé, sa signification est souvent mal comprise, même lorsqu'on sait l'appliquer à des exemples classiques. La raison pour cela est probablement liée au fait que l'enseignement classique de la thermodynamique court-circuite souvent ses fondations microscopiques. Certes, c'est là justement le but de la thermodynamique (s'intéresser à des situations macroscopiques observables sans détailler les mouvements microscopiques), et le passage du microscopique au macroscopique est souvent justifié a posteriori dans des cours plus complexes de physique statistique, bien souvent ignorés dans les classes préparatoires et de nombreuses grandes écoles. Et c'est dommage car une compréhension intuitive des mouvements microscopiques, même sans les formaliser mathématiquement, permet d'aborder plus sereinement la thermodynamique.

Exercice 1.1 : Peut-être est-ce déjà clair pour vous ?

- a) Quels sont les ordres de grandeur de l'énergie interne et de l'énergie cinétique d'une voiture roulant à 80 km h^{-1} (on supposera que toutes les parties de la voiture sont à température ambiante) ?
- b) Quelle est l'énergie interne d'une piscine remplie d'eau, en kWh ? Si on pouvait récupérer cette énergie, de combien de personnes peut on supporter la consommation énergétique pendant un jour ? Est-ce qu'on peut ? Pourquoi ?

1.1.2 Mouvement d'agitation microscopique

Dans ce qui suit, nous illustrerons ces notions sur des gaz, car leur structure microscopique est simple.

Examinons un gaz sous l'angle de la mécanique classique appliquée aux atomes / molécules etc : on voit des objets qui bougent dans tous les sens à des vitesses très élevées (3 composantes). Ces objets peuvent être des boules simples (gaz monoatomique)



On peut également représenter les gaz polyatomiques par des assemblages de boules liés par une force. Les molécules polyatomiques peuvent tourner (3 axes possibles) et vibrer en plus de leur mouvement de translation. En simplifiant énormément, on

peut voir N_2 comme un système à deux boules reliées par une tige rigide



plus précisément par un ressort



Dans tous les cas, ces boules ou assemblages s'entrechoquent de temps en temps. On peut supposer ces collisions élastiques (c'est un gaz parfait), mais les molécules peuvent également avoir des interactions attractives et répulsives entre elles (ce que représentent par exemple les coefficients a et b dans l'équation de van der Waals).

Cette vision atomistique des gaz, que défendait Boltzmann plus ou moins seul contre tous au 19^{ème} siècle, a été fermement réfutée par de nombreux physiciens parmi ses contemporains, notamment Ostwald, Duhem et Mach. Les travaux ultérieurs de Perrin sont intéressants parce qu'ils démontrent ce mouvement erratique (mouvement brownien) expérimentalement :

Extrait de "Notice sur les travaux scientifiques de M. Jean Perrin, 1923"

Les hypothèses moléculaires, qui triomphent aujourd'hui, étaient il y a vingt ans regardées comme chimériques par beaucoup de physiciens et de chimistes. A diverses reprises, en ce temps où les énergétistes des écoles d'Ostwald ou de Duham s'élevaient contre ces hypothèses qu'ils déclaraient inutiles et sans fondement, j'avais été de ceux qui persistaient à défendre les conceptions atomistiques. D'autre part, l'observation microscopique des colloïdes et des suspensions m'avait familiarisé avec le mouvement brownien, et me donna bientôt la possibilité d'une vérification quantitative directe des théories moléculaires, qui a contribué à les faire accepter.

On sait en quoi consiste ce mouvement brownien. Quand on observe au microscope une particule inanimée quelconque au sein d'un fluide "en équilibre" contenu dans une petite cuve immobile et fermée, on constate que cette particule ne demeure jamais en repos : elle va, vient, monte, descend, remonte, tournoie, dans une agitation parfaitement irrégulière, qui, à température constante, garde indéfiniment la même activité moyenne, et qui est d'autant plus vive que la particule est plus petite. Nulle cause extérieure n'intervient, et l'on est forcé de conclure avec Wiener (1863) que l'agitation est causée "par des mouvements internes caractéristiques de l'état fluide", que la particule suit d'autant plus fidèlement qu'elle est plus petite. C'est là un caractère profond de ce qu'on appelle un fluide en équilibre. Son repos apparent n'est qu'une illusion due à l'imperfection de nos sens et correspond à un certain régime permanent d'agitation intime, violente et désordonnée.

1.1.3 Énergie cinétique

Regardons ce gaz de plus en plus loin : le mouvement microscopique devient de moins en moins perceptible, et à partir d'une certaine échelle, on verra peut-être que toutes les boules voisines vont en gros dans le même sens : elles ont un mouvement d'ensemble. Si on soustrait ce dernier du mouvement général, il ne reste que le mouvement désordonné microscopique, qui constitue "l'agitation thermique".

Exemple :



Dans cette animation par exemple, l'énergie cinétique est nulle . Il n'y a que du mouvement thermique. On a :

$$\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = 0 \quad \text{mais} \quad \langle v_x^2 \rangle \neq 0 \quad \langle v_y^2 \rangle \neq 0$$



Dans celle-ci, elle ne l'est pas : il y a un mouvement d'ensemble vers la droite.

$$\langle v_x \rangle \neq 0 \quad \langle v_y \rangle = 0 \quad \text{mais} \quad \langle v_x^2 \rangle \neq 0 \quad \langle v_y^2 \rangle \neq 0$$

Cette séparation est courante en mécanique, et devient très claire si l'on utilise le

centre de masse G du système : l'énergie cinétique K du système est celle du centre de masse $\frac{1}{2}mv_G^2$. De façon imagée c'est l'énergie cinétique du mouvement "visible" à l'échelle humaine (voir exemple voiture plus haut). L'exercice suivant rappelle la formulation mathématique de cette séparation en mécanique classique.

Exercice 1.2 : On considère un ensemble de N particules de masses m , de positions M_i et de vitesses $\mathbf{v}_i$.)

- a) *Rappeler la définition du centre de gravité G et exprimez sa vitesse, qu'on notera $\mathbf{v}$.*

On a

$$\mathbf{OG} = \frac{\sum_{i=1}^N m \mathbf{OM}_i}{\sum_{i=1}^N m}$$

et donc la vitesse du centre de gravité est :

$$\mathbf{v} = \frac{\sum_{i=1}^N m \mathbf{v}_i}{\sum_{i=1}^N m} = \frac{\mathbf{P}}{M}$$

où $\mathbf{P}$ est la quantité de mouvement du système.

- b) *On note $\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}$ la vitesse des particules dans le référentiel du centre de masse. Vérifiez que la quantité de mouvement $\sum_{i=1}^N m \mathbf{w}_i$ et la vitesse moyenne $\sum_{i=1}^N m \mathbf{w}_i / \sum_{i=1}^N m$ sont nulles dans ce référentiel .*

- c) *En déduire que l'énergie cinétique totale peut s'écrire :*

$$E_c = \frac{1}{2} M v^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m w_i^2$$

Le premier terme est K , le second est la contribution de l'agitation moléculaire à l'énergie interne.

1.1.4 Énergie interne et température

L'énergie interne U c'est tout le reste :

- la somme des énergies de masses $\epsilon_0 = mc^2$ des particules. Elle ne nous intéresse pas car elle est constante dans la mesure où l'on ne fait pas de réactions nucléaires.
- l'énergie cinétique de translation des atomes / molécules dans le référentiel du centre de masse du système : c'est le mouvement thermique, invisible directe-

ment à l'échelle humaine. Sa valeur moyenne est, d'après l'exercice précédent :

$$\langle \epsilon_C \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m w_i^2 = \left\langle \frac{1}{2} m w^2 \right\rangle \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m (w_{i,x}^2 + w_{i,y}^2 + w_{i,z}^2) \\ &= \left\langle \frac{1}{2} m w_x^2 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} m w_y^2 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} m w_z^2 \right\rangle \end{aligned} \quad (1.2)$$

où $w_{i,x}$ (respectivement $w_{i,y}$ et $w_{i,z}$) sont les composantes de la vitesse de translation dans la direction x (respectivement y , z). Les vitesses sont équiprobables dans les trois directions de notre espace et donc $\langle \frac{1}{2} m w_x^2 \rangle = \langle \frac{1}{2} m w_y^2 \rangle = \langle \frac{1}{2} m w_z^2 \rangle$.

La température absolue est proportionnelle à cette énergie cinétique de translation erratique et on pose :

$$\frac{1}{2} k_B T = \left\langle \frac{1}{2} m w_x^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} m w_y^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} m w_z^2 \right\rangle \quad (1.3)$$

où $k_B = 1.380\,649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann.

Exercice 1.3 : Imaginez que bien avant Boltzmann, un certain Truquemuche ait proposé la même égalité avec une valeur k_T (constante de Truquemuche) différente de k_B . Qu'est ce que cela change pour la définition de la température ? Pourquoi Boltzmann a-t-il pris cette valeur de k_B ?

L'énergie cinétique moyenne de translation d'une molécule dans son mouvement thermique est donc, d'après (1.1)-(1.3) :

$$\langle \epsilon_C \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m w^2 \right\rangle = \frac{3}{2} k_B T \quad (1.4)$$

- Pour les molécules polyatomiques, on peut encore séparer leur mouvement translationnel, décrit précédemment, de leurs mouvements de rotation et vibration, avec les énergies cinétiques $\langle \epsilon_R \rangle$ et $\langle \epsilon_V \rangle$ associées.
- enfin, il existe potentiellement une énergie potentielle $\langle \epsilon_P \rangle$ d'interaction entre les molécules (elle est supposée nulle pour les gaz parfaits). Ces interactions nécessitent en général le recours à la physique quantique, mais on peut imaginer un ressort entre deux atomes qui donne des contributions élémentaires d'énergie potentielle $\frac{1}{2} k \Delta x^2$.

En résumé, l'énergie interne des N particules est la somme de toutes ces contributions, soit :

$$\frac{U}{N} = \underbrace{\epsilon_0}_{\text{masse}} + \underbrace{\left\langle \frac{1}{2} m w^2 \right\rangle}_{\substack{\text{translation} = \\ \frac{3}{2} k_B T}} + \underbrace{\langle \epsilon_R \rangle}_{\text{rotation}} + \underbrace{\langle \epsilon_V \rangle}_{\text{vibration}} + \underbrace{\langle \epsilon_P \rangle}_{\text{interaction}}$$

Le raisonnement précédent repose entièrement sur des concepts de mécanique classique appliqués à un ensemble de molécules. L'expression (1.3) est l'exemple le plus simple de ce qu'on appelle :

Théorème d'équipartition : Si l'énergie d'un système classique est la somme de m modes quadratiques (par exemple $\frac{1}{2}mv^2$ ou $\frac{1}{2}k\Delta x^2$) et que ce système est en équilibre avec une source thermique à la température T , son énergie interne moyenne est :

$$\frac{U}{N} = m \frac{1}{2} k_B T$$

Par exemple pour des gaz monoatomiques, le mouvement thermique se limite aux translations et d'après les développements précédents on a :

$$\begin{aligned} \frac{U}{N} &= \epsilon_0 + \left\langle \frac{1}{2} m w_x^2 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} m w_y^2 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} m w_z^2 \right\rangle \\ &= \epsilon_0 + \frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{2} k_B T \\ &= \epsilon_0 + \frac{3}{2} k_B T \end{aligned}$$

Une parenthèse : si l'on calcule l'énergie moyenne par mole plutôt que par molécule, on obtient :

$$\frac{U}{n} = \mathcal{N}_A \epsilon_0 + \frac{3}{2} \mathcal{N}_A k_B T = U_0 + \frac{3}{2} \mathcal{R} T$$

où $\mathcal{N}_A = 6.02 \times 10^{23}$ est le nombre d'Avogadro et $\mathcal{R} = \mathcal{N}_A k_B$ la constante des gaz parfaits. C'est le résultat que vous connaissez pour un gaz parfait monoatomique ($C_v = \frac{3}{2} \mathcal{R}$).

Considérons maintenant un gaz diatomique constitué des mêmes atomes (par exemple N_2 ou O_2), la liaison étant suivant l'axe z : la molécule peut tourner autour des axes x et y et il y a donc deux degrés de liberté de rotation supplémentaires² avec les énergies cinétiques $\frac{1}{2} J_x \Omega_x^2$ et $\frac{1}{2} J_y \Omega_y^2$, qui sont bien quadratiques et on obtient alors :

$$\frac{U}{N} = \epsilon_0 + \frac{5}{2} k_B T$$

résultat encore connu ($C_v = \frac{5}{2} \mathcal{R}$ pour les gaz diatomiques type X_2), et très bien vérifié à température ambiante pour N_2 ou O_2 .

Ce dernier résultat pour un gaz diatomique est pourtant paradoxal puisqu'en fait il existe un potentiel d'interaction entre les deux atomes, qu'on peut supposer harmonique (un ressort avec $\langle \epsilon_P \rangle = \frac{1}{2} k \Delta x^2$) et l'énergie cinétique de vibration associée en $\frac{1}{2} \mu (d\Delta x/dt)^2$. On devrait donc normalement encore ajouter $\frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{2} k_B T$ pour ces deux contributions, ce qui donnerait une énergie interne en $\frac{7}{2} k_B T$. En fait, cette

2. Pourquoi pas 3 ? parce que le moment d'inertie par rapport à l'axe z est négligeable et donc cette rotation ne contribue pas.

vibration est “gelée” à température ambiante par des effets quantiques et n’est perceptible qu’au delà d’une certaine température (3395 K pour N_2) où l’on retrouve effectivement $\frac{7}{2}k_B T$. De même les degrés de liberté de rotation peuvent être gelés à très basse température mais il faudrait descendre à des températures auxquelles le gaz serait liquéfié depuis longtemps. Les degrés de translation, eux, sont toujours excités.

Un dernier exemple concernant les solides : on peut imaginer des atomes pouvant bouger faiblement autour de leur position d’équilibre et liés les uns aux autres par des ressorts. Il y a donc 0 degrés de liberté de translation, 3 de vibration, et 3 contributions d’énergie potentielle liés à l’interaction dans les directions x , y et z . On devrait donc avoir :

$$\frac{U}{N} = 6 \times \frac{1}{2} k_B T = 3k_B T$$

soit $C_v = 3R$, résultat connu sous le nom de *loi de Dulong et Petit*. Cette loi est remarquablement bien vérifiée pour de nombreux solides à température ambiante, mais surestime C_v pour quelques autres, en particulier le diamant. Ici encore, cet écart est lié à des effets quantiques.

1.1.5 Chaleur et travail

On a vu que l’énergie totale d’un système pouvait être séparé en deux parties au sein d’un volume : énergie cinétique, perceptible à l’échelle macroscopique et correspondant à un mouvement d’ensemble, et énergie interne lié à l’agitation microscopique, imperceptible par notre oeil (sauf au microscope comme l’a montré Perrin, voir plus haut).

Raisonnons maintenant en observant la surface d’un système fermé (imperméable à la matière) pendant un certain temps, par exemple le sempiternel piston mobile fermant un cylindre solide contenant un gaz. Des molécules de gaz tapent en permanence sur les parois fixes du cylindre et sur le piston.

- Les parois du cylindre ne veulent pas bouger, parce que les atomes d’un solide sont fermement maintenus autour de leur position d’équilibre par des potentiels d’interaction (disons des ressorts). Il n’y a pas de mouvement d’ensemble perpendiculairement à la surface solide. Alors tout ce que font les molécules qui tapent dessus, c’est d’ébranler les atomes du solide et de les faire osciller au voisinage de leur position d’équilibre. Le gaz transmet de la chaleur au solide, mais pas de travail.

Exercice 1.4 : Intuitivement, cet ébranlement des atomes de la surface interne du cylindre est propagée dans l’épaisseur du solide vers l’extérieur. Comment s’appelle ce phénomène ?

- Le piston, lui, veut bien bouger. Sur sa paroi intérieure, les molécules de gaz tapent dessus. Ces chocs peuvent créer un déplacement d'ensemble des atomes du piston, donc une variation de volume du gaz. Il y a du travail (cédé ou reçu)³

En bref, chaleur et travail sont bien difficiles à distinguer pour un observateur microscopique et c'est pourquoi seule leur somme intervient dans le premier principe. En revanche, à notre échelle, c'est très clair : il y a du travail si le volume varie.

Dernière remarque très importante : le travail correspond à un échange d'énergie avec un mouvement d'ensemble, par exemple celui qui bouge le piston dans l'exemple précédent. La chaleur est aussi un échange d'énergie mais avec un mouvement à moyenne nulle. Le premier principe traite les deux de façon symétrique, et pourrait laisser penser qu'ils sont librement interchangeables. C'est faux c'est tout l'enjeu du second principe : on peut aisément transformer du travail en chaleur (détruire de l'ordre) mais pas l'inverse (construire un mouvement ordonné à partir d'un désordre). Or ce dernier point est très important puisque cela concerne les machines thermiques.

Exemple :



- a) Dans cet exemple, il n'y a pas de transfert de chaleur entre le gaz et l'extérieur. Par contre le gaz fournit du travail à l'extérieur (pourquoi ? à qui ?)



- b) Dans celui-ci, il y a pas de travail, mais du transfert de chaleur (la paroi au milieu est réalisée dans Algodoo avec un système masses-ressorts qui représente les vibrations des atomes dans un solide...)

1.2 Le second principe

1.2.1 Fondement et conséquences

On pourra trouver une liste de 20 formulations différentes dans le polycopié d'Orsay, dont la plupart ne font pas intervenir l'entropie. La motivation historique était de montrer qu'on ne peut transformer de la chaleur en travail qu'avec une machine ditherme, et avec un rendement inférieur à 1. Une autre classe de définitions concerne

3. Notons que les atomes du piston sont aussi ébranlés par les chocs des molécules de la même façon que ceux du cylindre. Le gaz peut donc aussi transmettre de la chaleur via le piston. Mais cette chaleur est en général négligeable devant le travail parce que le temps de diffusion à travers l'épaisseur du piston est bien plus long que le temps caractéristique du mouvement d'ensemble.

les évolutions spontanées d'un système : la chaleur diffuse du chaud vers le froid, la matière du concentré vers le dilué, certaines réactions chimiques sont spontanées (en particulier la combustion). Au-delà du résultat, dont on ne connaît pas de contre-exemple, pourquoi ? C'est ici que l'entropie intervient, mais pour aller au-delà de l'outil mathématique, il faut comprendre ce qu'elle représente.

Citons quelques conséquences pratiques en vrac : le mouvement perpétuel est impossible, les frottements dissipent de l'énergie mécanique en chaleur, le courant électrique chauffe les conducteurs, nos cellules vieillissent et meurent (donc nous aussi), séparer deux constituants a un coût énergétique, fabriquer un produit fini également, séparer CO_2 en C et O_2 ne va pas de soi⁴, un combustible brûle spontanément à l'oxygène.

On voit l'enjeu dans le contexte environnemental actuel et certaines prétendues solutions miracles. Le second principe est sans doute la meilleur arme contre l'obscurantisme, le green-washing et bien d'autres maux de nos sociétés.

1.2.2 Interprétation microscopique

Interprétons le second principe pour un système fermé isolé, c.a.d. $W = Q = 0$. Au passage, cette dernière équation montre bien que le premier principe n'a rien à dire sur le sujet, hormis que son énergie interne est constante, disons égale à U_0 . Supposons un gaz parfait monoatomique pour simplifier, bref des boules parfaitement élastiques. Les parois, elles, peuvent être vues comme un édifice rigide d'atomes (sans ressorts) et les molécules du gaz vont rebondir sur cet édifice sans l'ébranler.

On a vu que l'énergie interne d'un gaz monoatomique, c'était de l'énergie cinétique de translation. Il existe une infinité de configurations microscopiques donnant une énergie interne totale U_0 : par exemple des boules feignantes se promenant gentiment dans un coin du système et d'autres très énervées ailleurs. Du moment que l'excès d'énergie cinétique de ces dernières compense le défaut des premières, pas de problème, on a U_0 . On peut réaliser expérimentalement cette dichotomie en mettant une paroi entre les énervées et les feignantes, puis en enlevant cette paroi. Une fois mises en contact, on sent bien qu'à cause des chocs les boules énervées vont dynamiser les feignantes et réciproquement, ces dernières vont freiner les premières, et qu'elles vont finalement trouver un consensus et se mouvoir en gros toutes à la même vitesse, de telle sorte que la somme des énergies cinétiques fasse U_0 .

Exercice 1.5 : Quelle est la température finale si on a initialement une fraction α de boules énervées à T_1 et une fraction $1 - \alpha$ de boules feignantes à la température $T_2 < T_1$?

On pourrait aussi mettre initialement une paroi entre des boules raréfiées et des

4. Un proche m'affirmait récemment ne pas comprendre pourquoi. . .

boules densément réparties, ou bien une zone avec des boules et une autre vide, puis l'enlever. Les boules vont finir par occuper tout l'espace de façon homogène.

Mais les deux conclusions précédentes sont intuitives. Après tout, toutes les configurations sont possibles et les lois de Newton sont réversibles. Pourquoi ne voit-on pas le chemin inverse? des boules ayant initialement toutes la même vitesse, avec certaines qui accélèrent et d'autres vont ralentir? ou bien des boules occupant initialement tout l'espace, se regroupant toutes dans la partie gauche de l'enceinte?

Exercice 1.6 : Avant de lire la suite, essayez de répondre à la question par vous-même.

1.2.3 Quelques probas (assez) simples

(inspiré par Brunet, Beugnon & Wandersman 2015)

Simplifions le problème : prenez 4 boules numérotées et une enceinte coupée en deux cases. Combien de façons y a-t-il de mettre :

- aucune boule à gauche : **1 possibilité** (toutes à droite)
- une boule à gauche, 3 boules à droite? on met à gauche la boule 1, 2, 3 ou 4, soient **4 possibilités**
- deux boules de chaque côté? on peut mettre à gauche les deux boules (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) soient **6 possibilités**,

et par symétrie :

- une boule à droite, 3 boules à gauche : **4 possibilités**
- aucune boule à droite : **1 possibilité**

En bref l'équidistribution des boules entre les deux moitiés est la plus probable. C'est tout ce qu'il y a à comprendre, mais on va essayer de le formaliser pour un plus grand nombre de boules.

Les nombres 1, 4, 6, 4, 1 vous rappellent peut-être le triangle de Pascal? il s'agit de $\binom{4}{p}$ pour $p = 0, 1, 2, 3, 4$, où :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)! p!}$$

En tout on avait 2^4 configurations possibles. Prenons maintenant N boules. En tout il y a 2^N manières possibles de les répartir dans les deux boîtes.

Calculons le nombre de façons d'en mettre :

$$N_G = N \frac{1+m}{2} \quad \text{à gauche} \quad N_D = N \frac{1-m}{2} \quad \text{à droite} \quad (C)$$

CHAPITRE 1. RAPPELS

- La somme fait bien N ,
- L'écart à l'équidistribution est mesuré par le nombre $m = 2N_G/N - 1$ qui peut prendre les valeurs :

$$-1 \quad -1 + \frac{2}{N} \quad \dots \quad -\frac{2}{N} \quad 0 \quad \frac{2}{N} \quad \dots \quad 1 - \frac{2}{N} \quad 1$$

- Il y a autant de boules des deux côtés pour $m = 0$
- Toutes les boules sont à gauche pour $m = 1$, (toutes à droite pour $m = -1$).
- On peut aussi écrire que :

$$m = \frac{N_G - N_D}{N}$$

et que sa valeur absolue représente donc l'excès de boules $|N_G - N_D|$ d'un côté rapporté au nombre total N .

Le nombre possible de configurations (C) est ⁵ :

$$\Omega(m, N) = \frac{N!}{\left(N \frac{1+m}{2}\right)! \left(N \frac{1-m}{2}\right)!}$$

et la probabilité de l'obtenir est :

$$P(m, N) = \frac{\Omega(m, N)}{2^N}$$

Grâce à la formule de Stirling, on peut calculer une approximation du $\ln$ du nombre de configurations :

$$\ln \Omega(m, N) \sim -N \left[\frac{1+m}{2} \ln(1+m) + \frac{1-m}{2} \ln(1-m) \right]$$

Exercice 1.7 : Vérifiez-le.

On rappelle que la formule de Stirling indique que si N est grand, alors :

$$\ln N! \sim N \ln N - N$$

On pourra, d'après cette dernière, montrer au préalable que :

$$\ln \binom{N}{Nx} \sim -N [x \ln x + (1-x) \ln(1-x)]$$

Si on cherche les probabilités des configurations proches de l'équidistribution, m est proche de 0 et on peut faire un développement limité :

$$\begin{aligned} \ln \Omega(m, N) &\simeq -N \left[\left(\frac{1+m}{2} \right) \left(m - \frac{m^2}{2} + o(m^2) \right) + \left(\frac{1-m}{2} \right) \left(-m - \frac{m^2}{2} + o(m^2) \right) \right] \\ &= -N \frac{m^2}{2} + o(m^2) \end{aligned}$$

5. En physique statistique on utilise le terme "micro-état" plutôt que "configuration"

et donc finalement, nombre de configurations et probabilité d'une réalisation m sont proportionnelles à :

$$\exp\left(-N\frac{m^2}{2}\right)$$

Il s'agit d'une loi Gaussienne centrée sur 0 et d'écart-type $1/\sqrt{N}$. Si N est très grand, on peut considérer m comme une variable aléatoire variant continûment sur l'intervalle $[-1, 1]$ et chercher la densité de probabilité $\rho(m)$. la probabilité pour que la variable m soit comprise entre x et $x + dx$ est $K \exp(-Nx^2/2) dx$. La normalisation donne alors :

$$\rho(m) = \sqrt{\frac{N}{2\pi}} \exp\left[-N\frac{x^2}{2}\right]$$

Exercice 1.8 : Vérifiez-le.

La variable m est donc égale à sa valeur moyenne $\pm$ l'écart-type soit :

$$m = 0 \pm \frac{1}{\sqrt{N}}$$

et donc le nombre de boules à gauche est :

$$N_G = \frac{N}{2} \pm \frac{\sqrt{N}}{2}$$

D'après les propriétés des lois gaussiennes, la probabilité pour que $m > r/\sqrt{N}$ vaut $\text{erfc}(r/\sqrt{2})$. Concrètement, si on prend $N = 10^{20}$, la probabilité pour qu'il y ait plus d'un milliardième des boules en excès à gauche ou à droite est de l'ordre de 10^{-23} !

Exercice 1.9 : Vérifiez-le.

Notre intuition de boules finalement équidistribuées dans tout le volume est donc bien conforme aux probabilités.

Résumons : on a enfermé initialement disons 30 % de boules en plus dans la moitié gauche que dans la droite ($m = 0.3$). Quand on enlève la paroi, toutes les localisations sont accessibles pour toutes les boules : on va voir successivement des configurations de plus en plus probables : l'excès de boules d'un côté m va diminuer et Ω va augmenter. Comme la gaussienne est très étroite, on observera au bout d'un certain temps les boules équidistribuées spatialement parce que c'est la configuration de loin la plus probable, d'autant plus que le nombre de boules est grand. Notons que le raisonnement ne dépend absolument pas de la façon dont on a partitionné l'enceinte en deux : un système déséquilibré spatialement d'une quelconque façon va

donc évoluer vers une concentration homogène quel que soit le déséquilibre initial. Qualitativement, c'est la même chose pour les énergies cinétiques : ce qu'on observe (toutes les boules ont la même énergie cinétique) est le plus probable.

En clair, le nombre de configurations possibles a augmenté depuis qu'on a enlevé la plaque et le système converge vers la configuration la plus probable. C'est l'équilibre. L'entropie est comme on va le voir une fonction croissante du nombre de configurations et a augmenté pour atteindre un maximum.

La thermodynamique, dans son acception classique, décrit ces équilibres, et le fait que l'entropie augmente pour y arriver. Cette augmentation d'entropie est celle que vous connaissez sous la notation $d_i S$ (« i » comme irréversible), ou bien S_P (« P » comme production). Mais elle ne dit pas à quelle « vitesse » l'entropie augmente. C'est du ressort de la thermodynamique dite *hors-équilibre* ou de sa version macroscopique qu'on appelle communément *transferts*.

1.2.4 L'entropie

L'entropie est proportionnelle au log du nombre de configurations Ω (appelons les maintenant micro-états) possibles d'un système de particules *isolé* (indéformable et n'échangeant pas de chaleur avec l'extérieur), *à l'équilibre*, respectant des contraintes données (tel nombre de particules N , le volume accessible vaut telle valeur V , l'énergie interne vaut telle valeur U) :

$$S(U, V, N) = k_B \ln \Omega(U, V, N)$$

où k_B est la constante de Boltzmann. Comme déjà mentionné, sa valeur est arbitraire et fixe l'échelle des températures. Ce cadre de travail est appelé hypothèse *microcanonique*.

Deux remarques importantes :

- L'entropie est additive. En effet si on a deux systèmes séparés A et B à l'équilibre ayant des nombres de micro-états respectifs Ω_A et Ω_B , l'ensemble des deux systèmes a $\Omega_A \times \Omega_B$ micro-états, et donc $S = S_A + S_B$ grâce au log.
- L'entropie est une grandeur extensive. Si on reprend la section précédente on a vu en effet que $\ln \Omega \sim -Nm^2/2$
- Sur le même exemple, on voit que l'entropie est maximale à l'équilibre (quand $m = 0$) parce que l'état observé est le plus probable.

Plutôt que postulés brutalement comme il est d'usage dans de nombreux cours de thermodynamique, ces conclusions vous donnent, on l'espère, une image plus réaliste de l'entropie.

1.2.5 Variation de l'entropie avec l'énergie interne. Température

Comment S varie-t-elle avec l'énergie ? Pour le savoir, il faut examiner $(\partial S/\partial U)_{V,N}$ (on garde le nombre de particules et le volume constants). Dans ces conditions, pour que l'énergie totale puisse augmenter, il faut que l'énergie atteignable par chaque particule soit plus grande. On sent intuitivement qu'il y a alors plus de façons de réaliser une somme donnée⁶. On a donc forcément $(\partial S/\partial U)_{V,N} > 0$. La température absolue est justement définie par :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} = \frac{1}{T} \quad (1.5)$$

On peut comprendre cette relation de la façon suivante : on suppose que l'énergie de chaque particule peut prendre des valeurs discrètes $0u_0, 1u_0, 2u_0 \dots$. Prenons un système de 3 particules et calculons le nombre de micro-états possible pour que l'énergie interne totale des 3 particules vaille $0u_0, 1u_0, 2u_0, 3u_0, 4u_0 \dots$. Le tableau suivant donne les premières configurations :

$\frac{U}{u_0} = \sum_{i=1}^3 \frac{U_i}{u_0}$	$\frac{U_1}{u_0}$	$\frac{U_2}{u_0}$	$\frac{U_3}{u_0}$	Ω		$\frac{U}{u_0} = \sum_{i=1}^3 \frac{U_i}{u_0}$	$\frac{U_1}{u_0}$	$\frac{U_2}{u_0}$	$\frac{U_3}{u_0}$	Ω
0	0	0	0	1						
1	1	0	0	3			2	1	0	10
	0	1	0				2	0	1	
	0	0	1				0	2	1	
2				6			1	2	0	
	2	0	0			3	0	1	2	
	0	2	0			1	0	2		
	0	0	2			3	0	0		
	0	1	1			0	3	0		
	1	0	1			0	0	3		
	1	1	0			1	1	1		

Un dénombrement précis montrerait que le nombre de micro-états pour avoir l'énergie U est⁷ :

$$\Omega(U) = \frac{1}{2} \left(\frac{U}{u_0} + 1 \right) \left(\frac{U}{u_0} + 2 \right)$$

6. On peut imaginer un jeu avec un nombre constant N de dés, mais où chaque dé aurait la curieuse propriété de pouvoir augmenter son nombre de faces. On va pouvoir réaliser des sommes de plus en plus grandes, et chaque somme peut être atteinte avec un nombre croissant de combinaisons différentes... (essayez avec 3 dés à deux faces, puis à trois faces, etc)

7. Le problème est équivalent au suivant : *de combien de façons peut-on ranger ℓ graines identiques dans n boîtes ?* Ici les boules sont des grains d'énergie u_0 et les boîtes sont les particules. Cela porte le nom de « nombre de compositions faibles » (voir ici). On peut utiliser la méthode dite des bâtons ou des taquets : on aligne toutes les graines et pour symboliser les parois des n boîtes, on place $n - 1$ séparateurs (les bâtons) quelque part entre les graines. Tout revient donc à placer $n - 1$ bâtons dans $\ell + n - 1$ et il y a $\binom{\ell + n - 1}{n - 1} = (\ell + n - 1)! / (n - 1)!(\ell)!$ possibilités.

L'entropie vaut donc :

$$\begin{aligned} S &= k_B \ln \frac{(U/u_0 + 1)(U/u_0 + 2)}{2} \\ &\simeq k_B \ln \frac{U^2}{2u_0^2} \quad \text{pour } U \text{ grand} \\ &\simeq k_B \left(2 \ln \frac{U}{u_0} - \ln 2 \right) \end{aligned}$$

et la température est donc définie par :

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{2k_B}{U}$$

Au passage, ce dernier résultat montre que la définition (1.5) donne bien une énergie interne variant en $k_B T$, comme on l'a vu dans la section 1.1.4.

Cet exemple montre donc que l'entropie augmente bien avec l'énergie interne parce qu'une grande énergie interne peut se répartir en un plus grand nombre de micro-états. Mais le tableau montre de plus qu'un saut d'énergie de U à $U + u_0$ engendre une augmentation du nombre de micro-états (et donc de l'entropie) d'autant plus grand que l'énergie (et donc la température) est faible : quand on passe de $0u_0$ à $1u_0$, on multiplie Ω par $3/1 = 3$, quand on passe de $1u_0$ à $2u_0$, on multiplie Ω par $6/3 = 2$, quand on passe de $2u_0$ à $3u_0$, on multiplie Ω par $10/6 = 1.66$, et ainsi de suite. En résumé :

- le nombre de micro-états d'un système fermé de volume fixe et d'énergie interne constante augmente avec cette énergie interne
- cette augmentation est d'autant plus forte que la température est faible.

1.2.6 Retour au second principe

Dans l'exemple précédent, comment augmenter l'énergie interne puisque le système est isolé et indéformable (donc pas de travail ni de chaleur en vertu du premier principe) ?

Relaxons l'hypothèse "isolé" et supposons que le système peut recevoir de la chaleur δQ par l'une de ses parois solides. Cette dernière peut être vue comme un assemblage d'atomes qui tremblotent autour de leur position d'équilibre et vont shooter dans les particules de l'enceinte qui arrivent à leur contact, et augmenter à chaque choc leur énergie de nu_0 , la somme de ces contributions valant δQ .

Le système augmente son énergie interne U d'une quantité δQ et voit donc son nombre de micro-états augmenter d'une quantité telle que :

$$d_e S = \frac{\partial S}{\partial U} \delta Q = \frac{\delta Q}{T}$$

Dans l'exemple présent avec $n = 3$, cela donne $(\ell + 2)!/2!(\ell)! = \frac{1}{2}\ell(\ell + 1)(\ell + 2)$.

On pourra consulter l'excellent site de maths de Gérard Villemin ou ce mini-cours de prépa, ou encore cette page.

Mais les particules loin de la paroi ne bénéficient pas immédiatement de ces chocs. Il va falloir que le système se mette à l'équilibre pour que tout le monde se répartisse cet excès d'énergie. Et comme on l'a vu, ce processus correspond à un nombre de configurations croissant et donc une augmentation d'entropie. C'est la partie irréversible $d_i S > 0$.

1.3 Systèmes hors-équilibre.

1.3.1 Qu'est-ce ?

La température d'un système n'est définie que s'il est en équilibre (toutes les boules ont les mêmes propriétés dynamiques et sont équidistribuées dans l'espace). Ainsi dans l'exemple ou l'on enlève une paroi entre deux gaz de températures distinctes



, les deux sous-systèmes sont initialement en équilibre et au bout d'un certain temps le système total est aussi en équilibre.

Mais entre les deux, on voit que l'énergie cinétique des boules est d'autant plus grande plus qu'elles sont vers la droite. La température n'est donc pas homogène. La thermodynamique ne sait pas traiter cet entre-deux, elle indique simplement que l'entropie a augmenté entre les deux états et sait caractériser l'équilibre final. En particulier, elle ne sait pas dire en combien de temps l'équilibre est atteint. Alors faut-il jeter la thermodynamique ?

1.3.2 Équilibre local

Non, et c'est le domaine de la thermodynamique dite *hors-équilibre*, qu'on peut traiter rigoureusement de façon statistique. Une solution simplifiée est, plutôt que considérer toutes les particules, de n'en considérer qu'un petit ensemble situé dans un petit volume au voisinage d'une position $\mathbf{r}$ de l'espace :

- ce volume doit être suffisamment petit à l'échelle macroscopique (on l'appelle dV dans ce cadre), pour que toutes les particules aient en gros les mêmes propriétés macroscopiques.
- mais il doit être aussi suffisamment grand à l'échelle microscopique (on l'appelle ν dans ce cadre), pour qu'il contienne un grand nombre de particules et qu'on puisse faire des moyennes (comme on le faisait auparavant pour des systèmes à l'équilibre).

Cette double contrainte s'appelle *séparation des échelles*. Elle n'est pas toujours vérifiée (en particulier dans les ondes de chocs). Ainsi, dans l'exercice de la section 1.1.3, la sommation discrète s'étend maintenant sur les particules de ce petit

volume. On peut définir ainsi localement masse volumique, concentration, quantité de mouvement par unité de volume, vitesse macroscopique, énergies totales, cinétique et interne massiques etc, en reliant les deux contextes, microscopique et macroscopique⁸ :

$$\begin{aligned} \rho(x, y, z, t) &= \frac{\sum m_i}{\nu} = \frac{dM}{dV} & C(x, y, z, t) &= \frac{\sum n_i}{\nu} = \frac{dM}{dV} \\ \mathbf{P}(x, y, z, t) &= \frac{\sum m_i \mathbf{v}_i}{\nu} = \frac{d\mathbf{P}}{dV} & \mathbf{v}(x, y, z, t) &= \frac{\sum m_i \mathbf{v}_i}{\sum m_i} = \frac{d\mathbf{P}}{\rho dV} \\ e(x, y, z, t) &= \frac{\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2}{\sum m_i} = \frac{d(U + K)}{\rho dV} & k(x, y, z, t) &= \frac{\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2}{\sum m_i} = \frac{dK}{\rho dV} \\ u(x, y, z, t) &= \frac{\sum \frac{1}{2} m_i w_i^2}{\sum m_i} = \frac{dU}{\rho dV} \end{aligned}$$

Les expressions précédentes permet de définir des grandeurs extensives globalement sur un volume V en intégrant. On peut calculer ainsi la masse, le nombre de moles, la quantité de mouvement, l'énergie cinétique, l'énergie interne etc :

$$\begin{aligned} M(t) &= \iiint \rho(x, y, z, t) dV & n(t) &= \iiint C(x, y, z, t) dV \\ \mathbf{P} &= \iiint (\rho \mathbf{v})(x, y, z, t) dV \\ K(t) &= \iiint \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) (x, y, z, t) dV & U(t) &= \iiint (\rho u)(x, y, z, t) dV \end{aligned}$$

(on n'écrit pas en général les dépendances par rapport à x, y, z, t dans les intégrales).

On voit ainsi qu'on peut appliquer toutes les lois de conservations existantes :

- la masse d'un système fermé se conserve (cool, on connaît M)
- la variation temporelle de la quantité de mouvement est donnée par les lois de Newton (bien ! on connaît $\mathbf{P}$, il reste à exprimer les forces).
- Enfin, la conservation de l'énergie est donnée par le premier principe. On connaît U et K , la puissance des forces extérieures est connue si on sait exprimer ces dernières, il manque $\dot{Q}$, ou plutôt $\dot{Q}$ parce qu'on raisonne par unité de temps.

Ce dernier point suggère donc que l'on peut encore faire de la thermodynamique pour des systèmes hors-équilibre, sous réserve de savoir exprimer $\dot{Q}$. Les équations résultantes sont celles de la mécanique des fluides, et leur obtention est détaillée dans Louisnard (2021).

8. Attention aux notations : le symbole “ d ” infinitésimal se rapporte au fait qu'on calcule les grandeurs sur un volume infinitésimal dV , ce n'est pas le même que le “ d ” qui apparaît par exemple dans $dU = -pdV + TdS$, qui se rapporte à des variations infinitésimales des grandeurs d'un système dans une transformation.

1.3.3 Conduction de la chaleur

Comme vu dans l'animation précédente, les boules rapides (fortes températures) tendent à communiquer leur énergie aux boules lentes (faibles températures). Lorsqu'on enlève la paroi, il y a donc un transfert d'énergie interne de la gauche vers la droite, parce qu'il y a un gradient de température orienté vers la gauche. Cela a donc suggéré à Fourier d'écrire ce transfert d'énergie sous la forme :

$$\mathbf{q} = -\lambda \mathbf{grad} T \quad \text{dimension} \quad ET^{-1}L^{-2}$$

C'est une densité de flux d'énergie, ou si on préfère une puissance par unité de surface. Le coefficient λ est la conductivité thermique ($EL^{-1}\theta^{-1}$). Ce mécanisme de transport contribue au $\dot{Q}$ du premier principe. La puissance entrant dans un système par sa surface S s'écrit :

$$\dot{Q} = \iint_S \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) dS = \iint_S \lambda \mathbf{grad} T \cdot \mathbf{n} dS$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire normal sortant du système, et où à gardé la convention de la thermodynamique $\dot{Q} > 0$ si le système reçoit de la chaleur⁹.

1.3.4 Équations locales de la conservation de l'énergie

Le premier principe conduit à l'équation de conservation locale de l'énergie, pour un système en écoulement (ou non) (Louisnard 2021) :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u \mathbf{v}) = -p \text{div} \mathbf{v} + \overline{\overline{\sigma_v}} : \overline{\overline{\mathbf{grad} \mathbf{v}}} + \mathcal{P} - \text{div} \mathbf{q} \quad (1.6)$$

où u est l'énergie interne massique. Le membre de gauche est classique pour les équations de conservation. On peut l'écrire alternativement :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} u \right)$$

Ensuite, dans le membre de droite de (1.6) :

- Le premier terme représente l'échauffement lors d'une compression ou le refroidissement lors d'une détente. Il est nul pour un fluide incompressible, et souvent négligeable si les variations de pression sont modérées.
- Le second, noté ϕ_v est toujours positif et lié à l'augmentation d'énergie interne à cause des frottements visqueux. Pour un fluide newtonien, il vaut $2\eta \left\| \overline{\overline{\mathbf{grad} \mathbf{v}}} \right\|^2$. Il est souvent négligeable sauf pour de très forts cisaillements d'un liquide très visqueux (huile moteur par exemple).

9. Attention celle des thermiciens est en général l'inverse ...

CHAPITRE 1. RAPPELS

- Le troisième représente l'énergie thermique reçue *en volume* et résulte en général de la dissipation d'une autre forme d'énergie en chaleur : effet Joule, chauffage micro-ondes, visco-élasticité dans les vibrations etc
- Le dernier est lié au transport de chaleur diffusif.

Si on néglige le premier et le second terme, on trouvera souvent l'équation de l'énergie sous la forme :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u \mathbf{v} - \lambda \mathbf{grad} T) = \mathcal{P} \quad (1.7)$$

À l'intérieur de la divergence, on retrouve deux contributions :

- le terme $\rho u \mathbf{v}$ proportionnel à la vitesse : c'est la densité de *flux convectif* d'énergie interne. Elle est nulle dans un solide.
- le terme $-\lambda \mathbf{grad} T$, c'est la densité de *flux conductif*.

Exercice 1.10 : Formulez la conservation de l'énergie pour un gaz parfait, en prenant la température comme inconnue.

On peut aussi formuler l'équation de conservation en enthalpie. On obtient :

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \phi_v + \mathcal{P} - \operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (1.8)$$

ou encore, sous forme conservative :

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho h \mathbf{v}) = \frac{Dp}{Dt} + \phi_v + \mathcal{P} - \operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (1.9)$$

Les 4 termes de droite s'interprètent de la même façon que pour l'équation de l'énergie interne (1.6).

En négligeant ϕ_v , on obtient :

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho h \mathbf{v} - \lambda \mathbf{grad} T) = \frac{Dp}{Dt} + \mathcal{P} \quad (1.10)$$

Si la pression est constante le terme Dp/Dt disparaît

Exercice 1.11 : Démontrez la conservation de l'énergie exprimée en enthalpie.

1.4 Problèmes de conduction pure

1.4.1 Équation de la chaleur

Considérons un solide ou bien un fluide immobile.

Exercice 1.12 : Ce dernier cas est rare... Pourquoi ?

Que devient l'équation de conservation exprimée en enthalpie (1.8) ?

- La vitesse $\mathbf{v}$ est nulle en tout point, donc $\Phi_v = 0$
- Si la pression est uniforme dans l'espace et constante dans le temps, on a $Dp/Dt = 0$,

L'équation (1.8) devient donc :

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \mathcal{P} \quad (1.11)$$

Si on écrit de plus l'enthalpie massique sous la forme $dh = c_p dT$ et que $\mathbf{q} = -\lambda \mathbf{grad} T$, on obtient :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} \lambda \mathbf{grad} T + \mathcal{P} \quad (1.12)$$

C'est l'équation de la chaleur.

Si la conductivité thermique peut être considérée comme constante, on obtient :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \nabla^2 T + \mathcal{P}$$

où $a = \lambda/\rho c_p$ est la diffusivité thermique.

1.4.2 Convection extérieure

En général, le solide est en contact avec un fluide en mouvement, soit par convection forcée, soit par convection naturelle. On ne s'intéresse à ce dernier que par l'énergie qu'il échange avec le solide à sa surface.

En un point de la surface du solide, on résume ce transfert de chaleur par :

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = h(T - T_\infty) \quad \text{soit} \quad -\lambda \mathbf{grad} T \cdot \mathbf{n} = h(T - T_\infty) \quad (1.13)$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire normal sortant du solide et h le *coefficient de convection*.

Il y a bien de la convection dans le fluide extérieur mais on ne s'intéresse qu'au champ de température dans le solide, ou *il n'y a que de la conduction*

Par ailleurs, il faut bien comprendre que dans (1.13), à la fois la température T et $\mathbf{grad} T$ sont à estimer en un point de la surface.

- Un h infiniment faible ($Bi \ll 1$) revient à supposer une surface quasiment isolée.
- Un h infiniment grand ($Bi \gg 1$) revient à supposer que la température de surface est T_∞ .

1.4.3 Autres conditions aux frontières.

On peut imposer la température :

$$T = T_S \quad (1.14)$$

ou bien le flux normal sortant (par exemple le flux solaire, une lampe infrarouge)

$$-\lambda \mathbf{grad} T \cdot \mathbf{n} = q_S \quad (1.15)$$

On peut aussi imposer une condition de rayonnement. Dans le cas où le solide peut être considéré comme un corps gris diffusant vers une enceinte de grande taille, on écrit :

$$-\lambda \mathbf{grad} T \cdot \mathbf{n} = \sigma \epsilon (T^4 - T_\infty^4) \quad \text{pour } (x, y, z) \in S, \forall t > 0 \quad (1.16)$$

où ϵ est l'émissivité et $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ est la constante de Stefan-Boltzmann (voir cours de rayonnement).

1.4.4 Condition initiale.

Si l'équation de la chaleur est écrite en régime instationnaire (sans enlever le $\partial T / \partial t$), il faut spécifier la température initiale en tout point du corps :

$$T(x, y, z, t = 0) = T_0.$$

On reviendra sur ce point au chapitre 3.

1.4.5 Simplification : régime permanent

Si la température ne dépend pas du temps, l'équation de la chaleur devient simplement :

$$\operatorname{div}(\lambda \mathbf{grad} T) + \mathcal{P} = 0$$

Cette situation intervient lorsque des conditions aux frontières constantes ont été appliquée au système depuis suffisamment longtemps pour que la température ne varie plus : le système a “oublié” la condition initiale et il est alors inutile d'écrire cette dernière.

Si λ est constant, on obtient alors $\nabla^2 T + \mathcal{P}/\lambda = 0$ (équation de Poisson). Si de plus $\mathcal{P} = 0$, c'est une équation de Laplace :

$$\nabla^2 T = 0 \quad (1.17)$$

Ces deux équations offrent de nombreuses méthodes de résolution intéressantes. En 1D, il s'agit simplement d'une équation différentielle d'ordre 2, dont l'intégration est aisée.

Il est intéressant de remarquer que (1.17) s'écrit aussi :

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = 0$$

qui a peu d'intérêt pour résoudre un problème concret mais est très parlante physiquement. Si on l'intègre sur un volume V enserré par une surface S , la formule de la divergence donne :

$$\iint_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

qui signifie simplement que la puissance $\dot{Q}_{\text{in}}$ qui rentre dans V est égal à celle qui sort $\dot{Q}_{\text{out}}$.

Un système thermique en régime permanent ne peut pas accumuler d'énergie.

Exercice 1.13 :

- a) *Comment s'énonce ce résultat en présence d'une source de chaleur volumique $\mathcal{P}$?*
- b) *Supposons que la conductivité thermique dépende de la température. Que deviennent ces derniers résultats ?*

1.4.6 Résistances thermiques.

Prenons le cas particulier d'un volume qui est un tube de flux (Fig. 1.1), dont les surfaces latérales sont tangentes à $\mathbf{q}$. Le résultat précédent reste valable, le flux de chaleur à travers le tube de courant est constant. Mais de plus les sections droites de ce tube de flux sont des isothermes.

Exercice 1.14 : Pourquoi ?

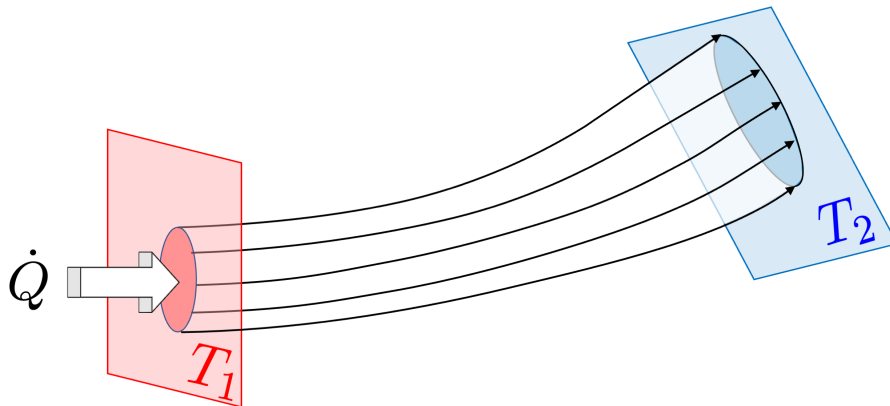


FIGURE 1.1 – Tube de flux

On peut montrer que le flux de chaleur $\dot{Q}$ est proportionnel à la différence de température $T_1 - T_2$ ¹⁰.

Le flux de chaleur traversant un tube de courant limité par deux surfaces isothermes à T_1 et T_2 s'écrit :

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{R}$$

où R est appelée *résistance thermique*, par analogie avec la loi d'Ohm. Ici elle d'origine conductive.

Exercice 1.15 : Montrer que les résistances conductives, respectivement entre deux plans, entre deux cylindres concentriques et entre deux sphères concentriques s'écrivent :

$$R = \frac{e}{\lambda S}, \quad R = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad R = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

On peut faire le même raisonnement pour un échange avec un fluide en convection, on obtient :

$$R = \frac{1}{hS}$$

où S est l'aire sur laquelle s'opère l'échange à la surface du solide.

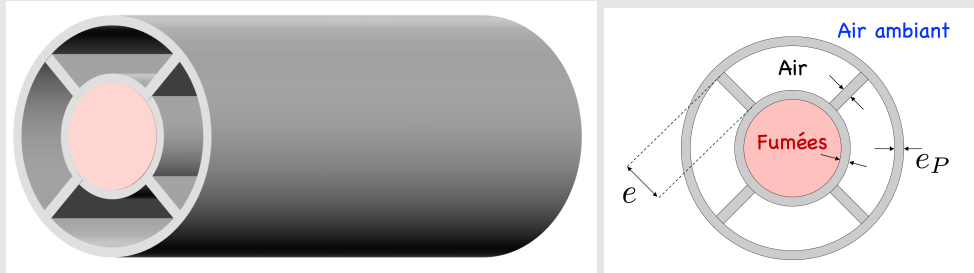
Ce formalisme permet de représenter les systèmes thermiques compris entre deux isothermes par un réseau de résistance en série et/ou en parallèle.

¹⁰. Il est assez logique que l'on retrouve une loi similaire à la loi d'Ohm car les présentes équations mathématiques sont formellement les mêmes que celles de la conduction électrique : en effet, la densité de courant s'écrit $\mathbf{j} = -\sigma \mathbf{grad} V$, avec $\nabla^2 V = 0$ en l'absence de source, et $I = \iint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$.

Exercice 1.16 : Un tube cylindrique dans lequel circule de l'eau chaude à température T_C est exposé à l'air extérieur hivernal à T_{ext} . On l'isole sur sa paroi extérieure avec une épaisseur d'isolant e .

Dessiner le schéma électrique et tracez la puissance thermique perdue par unité de longueur en fonction de l'épaisseur d'isolant.

Exercice 1.17 : Des fumées chaudes circulent dans la partie interne d'un double tubage. Les tubes interne et externe sont reliés par 4 plaques radiales de longueur ℓ . L'ensemble est constitué de tôles d'acier d'épaisseur e .



- Tracer approximativement les lignes de flux et les isothermes.*
- En déduire le schéma électrique équivalent, et donner les types et expressions de toutes les résistances. Quelles sont celles que l'on peut négliger ?*
- Calculer le flux perdu par les fumées par unité de longueur.*

1.4.7 Simplification : petits corps.

Cette simplification intervient lorsque l'on a une résistance conductive et une résistance convective en série (donc dans de nombreux problèmes de chauffage/refroidissement par un écoulement

On peut le voir en faisant le raisonnement approximatif suivant : soient T_C , T_P et T_∞ les températures au centre du corps, sur sa paroi et dans le fluide. Le flux conductif et le flux vers l'extérieur sont les mêmes et on a donc :

$$\dot{Q} \sim \lambda S \frac{T_C - T_P}{L} \sim hS(T_P - T_\infty)$$

On a donc :

$$\frac{T_C - T_P}{T_P - T_\infty} = \frac{hL}{\lambda} = \text{Bi}$$

où le nombre adimensionnel Bi est le nombre de Biot. Si ce dernier est très petit, on a $T_C - T_P \ll T_P - T_\infty$, ce qui veut dire que la différence de température entre le centre du corps et la paroi est très faible en regard de celle entre la paroi et le fluide extérieur. Le corps est donc à température quasiment uniforme, en d'autre

CHAPITRE 1. RAPPELS

termes il est presque en équilibre thermodynamique. On peut donc faire de la thermodynamique, définir T comme la température globale du corps et écrire le premier principe sur tout le corps :

$$\rho c_p V \frac{dT}{dt} = \mathcal{P}V + hS(T_\infty - T) \quad (1.18)$$

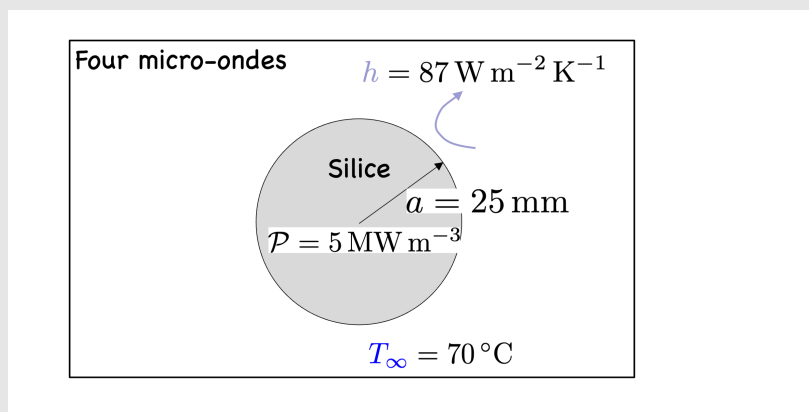
ce qui permet de faire de la thermique transitoire à peu de frais. Concrètement :

- On calcule le nombre de Biot $Bi = hL/\lambda$. Pour L on prend V/S .
- S'il est très petit devant 1 (pratiquement < 0.1), on écrit l'équation ci-dessus.

Exercice 1.18 : On sort des bonnes frites de la friteuse qui contient de l'huile à 190°C . Elles ont toutes la forme de parallélépipèdes rectangle $8\text{ mm} \times 8\text{ mm} \times 7\text{ cm}$. La conductivité thermique est $\lambda = 0.5\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1}$. On suppose un coefficient de convection $h = 10\text{ W m}^{-2}\text{ K}^{-1}$ et une température ambiante de 20°C .

- a) Peut-on la considérer chaque frite comme un petit corps ?*
- b) Au bout de combien de temps les frites sont-elles mangeables (63°C) ? On donne $\rho = 700\text{ kg m}^{-3}$ et $c_p = 3500\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$*

Exercice 1.19 : Une sphère de silice est chauffée dans un four à micro-ondes, qui impose à l'intérieur de la sphère un terme source de 5 MW m^{-3} . Le four est ventilé par de l'air à 70°C . La sphère a un rayon $a = 25\text{ mm}$, sa conductivité thermique est de $1\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1}$ et elle échange de la chaleur avec l'air ambiant avec un coefficient de convection de $87\text{ W m}^{-2}\text{ K}^{-1}$.



- a) Écrire l'équation de la chaleur et les conditions aux limites.*
- b) Calculer le champ de températures dans la sphère. Évaluer en particulier la température au centre T_C et la température de surface T_S .*
- c) Calculer le rapport $\frac{T_C - T_S}{T_S - T_\infty}$. Quel nombre adimensionnel retrouvez-vous ? Commentez.*

La sphère aurait-elle pu être considérée comme un petit corps ?

Chapitre 2

Ailettes. Quadripôles

On a vu précédemment comment la thermique stationnaire conduisait à la notion de résistance électrique associée à un tube de flux. Le flux de chaleur à travers un tel tube est constant en régime permanent (Fig. 1.1), et c'est ce qui permet la représentation par une résistance thermique.

On va voir dans un premier temps que les ailettes thermiques, dont l'importance pour intensifier les transferts est fondamentale, rentrent dans cette famille de problèmes.

Ensuite, il existe deux grandes classes de problèmes prohibant a priori l'emploi de circuits électriques équivalents :

- On reste en régime permanent mais le tube "fuit" et de l'énergie est perdue quelque part (Fig. 2.1).

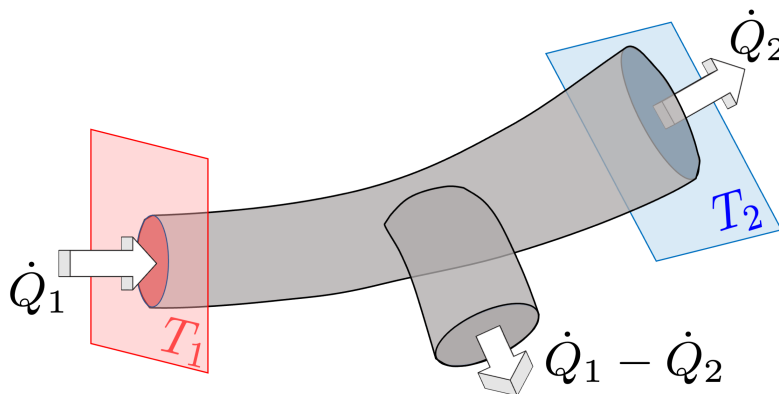


FIGURE 2.1 – Tube de flux avec fuite

C'est le cas d'un milieu dont les parois latérales ne sont pas isolées et perdent de l'énergie vers le fluide environnant. Dans ce cas, le flux à la sortie n'est plus égal au flux à l'entrée.

L'équation de la chaleur étant en général linéaire, on va voir qu'il est alors possible de représenter le système par une matrice reliant flux et températures

d'entrée et de sortie :

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ \dot{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ \dot{Q}_2 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Exercice 2.1 :

Comment s'exprime cette matrice pour un tube de courant standard, en fonction de la résistance thermique R ?

- Il n'y a pas de fuites mais on n'est pas en régime permanent (voir chapitre précédent). Dans ce cas le système accumule (ou perd) de l'énergie au cours du temps et à nouveau le flux de sortie n'est plus égal au flux d'entrée. On montre qu'il est possible de généraliser la forme matricielle ci-dessus à condition de remplacer $T(t)$ et $\dot{Q}(t)$ par leurs transformées de Laplace $\mathcal{T}(p)$ et $\mathcal{Q}(p)$. La matrice de transfert dépend alors de p .

Les deux cas précédents peuvent bien entendus intervenir simultanément. L'intérêt de ce formalisme est que pour des systèmes thermiques complexes composés de sous-parties simples en série, on peut multiplier ces quadripôles.

2.1 Ailettes

Les ailettes sont des solides conducteurs longs et fins qu'on "plante" sur un corps afin de le refroidir (ou le réchauffer). Les calories sont évacuées par les parois latérales vers l'air ambiant qui est en convection, souvent forcée. On trouve aussi des ailettes radiales utilisées pour refroidir des tubes dans lesquels circule un fluide. Le principe de ces dernières est identique mais leur mise en équation est un peu plus technique (à cause de la symétrie cylindrique). Il existe un grand nombre de configurations (Fig. 2.2)

2.1.1 Équation

On considère une ailette de section $S(x)$ (dont la forme est quelconque), et on note $\mathcal{P}(x)$ le périmètre (Fig. 2.3).

L'ailette échange de l'énergie vers l'air extérieur avec un coefficient d'échange convectif h . Le bilan d'énergie sur une tranche dx conduit à :

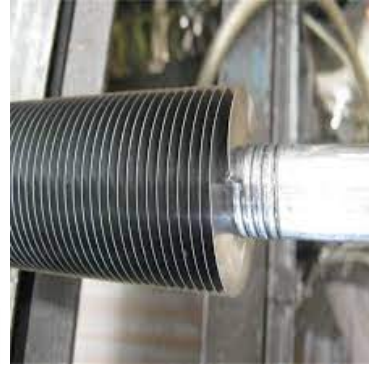
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \right) = h \mathcal{P} (T - T_\infty) \quad (2.2)$$



(a) Rectangulaires



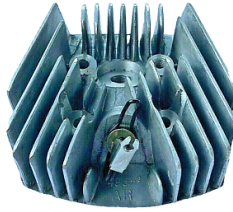
(b) Cylindriques



(c) Radiales



(d) Tubes cloutés



(e) Sur culasse



(f) Sur animal :-)

FIGURE 2.2 – Différents types d'ailettes

Exercice 2.2 : prouvez-le.

Dans le cas général, le périmètre $\mathcal{P}$ et la section S peuvent dépendre de x , et la solution de l'équation différentielle du second ordre (2.2) est alors délicate. On trouvera des résultats pour différentes géométries dans l'annexe A.2.2 de Jannot (2011).

Si la section S et le périmètre sont constants, comme sur la Fig. 2.3, l'équation devient plus simplement :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{h\mathcal{P}}{\lambda S} (T - T_\infty) \quad (2.3)$$

dont la solution est classique :

$$T(x) - T_\infty = A \operatorname{ch} kx + B \operatorname{sh} kx \quad \text{avec} \quad k = \left(\frac{h\mathcal{P}}{\lambda S} \right)^{1/2} \quad (2.4)$$

On remarque que :

- k à la dimension L^{-1} ,
- il représente le taux de décroissance de la température dans l'ailette.
- ce taux de décroissance est d'autant plus grand que h est grand (on évacue bien les calories sur les parois latérales).
- il est d'autant plus grand que λ est faible : une faible conduction “retient” les calories qui préfèrent s'évacuer par la surface latérale.

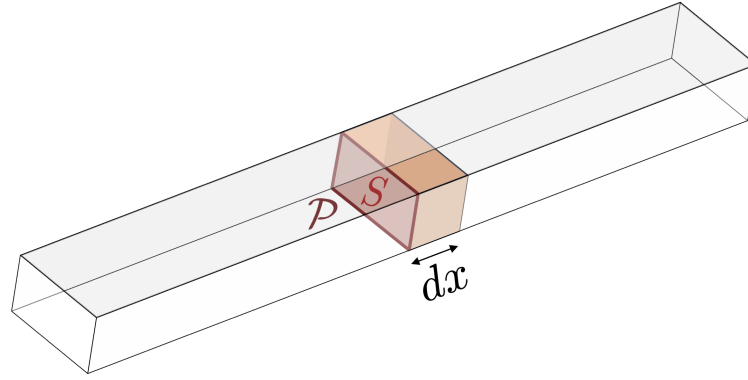


FIGURE 2.3 – Géométrie d’une ailette cylindrique. Sur ce schéma, la section S et le périmètre $\mathcal{P}$ sont constants.

- il est d’autant plus grand que l’ailette est un corps fin, c.a.d. $\mathcal{P}/S$ est grand (ce dernier rapport est la surface spécifique puisque $\text{surface/volume} = \mathcal{P}L/SL$)

Pour déterminer les constantes d’intégration, il faut une condition aux limites en $x = 0$ et une en $x = L$. En $x = 0$, on note la température T_0 (c’est celle du corps), et on a :

$$T_0 - T_\infty = A \quad (2.5)$$

Au bout de l’ailette en $x = L$, on impose classiquement l’une des trois conditions suivantes :

- la température $T(x = L) = T_\infty$,
- un flux nul $\dot{Q}(x = L) = 0$,
- une condition de convection $\dot{Q} = h_L S(T - T_\infty)$, où h_L est le coefficient d’échange convectif au bout de l’ailette.

2.1.2 Résistance thermique d’une ailette

Plutôt que de détailler les deux premiers cas (dont la validité sera discutée bientôt...) et d’aligner des pages de calcul, on prend la troisième condition qui est la plus générale, et on verra comment les deux autres en découlent à la limite. On a donc la condition :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x = L) = h_L (T - T_\infty)$$

où h_L est le coefficient de convection à l’extrémité de l’ailette, a priori différent de coefficient latéral h .

Exercice 2.3 : pourquoi ?

On obtient :

$$-\lambda k (A \operatorname{sh} kL + B \operatorname{ch} kL) = h_L (A \operatorname{ch} kL + B \operatorname{sh} kL)$$

CHAPITRE 2. AILETTES. QUADRIPÔLES

et en utilisant (2.5) :

Le profil de température s'écrit :

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \left[\operatorname{ch} kx - \frac{\tanh kL + \operatorname{Bi}}{\operatorname{Bi} \tanh kL + 1} \operatorname{sh} kx \right], \quad \text{où } \operatorname{Bi} = \frac{h_L}{k\lambda} = \frac{h_L}{h} \left(\frac{hS}{\lambda \mathcal{P}} \right)^{1/2}$$

Le flux entrant par la base de l'ailette est $\dot{Q} = -\lambda S \partial T / \partial x (x=0)$, soit :

$$\dot{Q} = \lambda S k (T_0 - T_\infty) \frac{\tanh kL + \operatorname{Bi}}{1 + \operatorname{Bi} \tanh kL},$$

et la résistance thermique de l'ailette est donc :

$$R = \frac{1}{\lambda S k} \frac{1 + \operatorname{Bi} \tanh kL}{\tanh kL + \operatorname{Bi}} \quad \left(\text{Remarque : } \frac{1}{\lambda S k} = \frac{1}{\sqrt{\lambda S h \mathcal{P}}} \right).$$

On peut alors envisager les limites suivantes :

- $kL \rightarrow \infty$, on parle d'ailette infiniment longue. Peu importe la valeur de Bi, toute l'énergie a pu être transférée par les parois latérales.

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \simeq \exp(-kx) \quad R = \frac{1}{\lambda S k} \quad (= \sqrt{\lambda S h \mathcal{P}})$$

Pratiquement on considère que c'est le cas, si :

$$\frac{T(L) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} < \frac{1}{100} \quad \Rightarrow \quad kL > 2 \ln 10 \simeq 4.61$$

- $\operatorname{Bi} \rightarrow 0$, on parle d'ailette adiabatique (le bout de l'ailette est isolé). On obtient :

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \simeq \frac{\operatorname{ch} k(L-x)}{\operatorname{ch} kL} \quad R = \frac{1}{\lambda S k \tanh kL}$$

En résumé :

Le flux aspiré par l'ailette et sa résistance thermique sont

$$\dot{Q} = \lambda S k (T_0 - T_\infty) f \quad R = \frac{1}{\lambda k S} \frac{1}{f} \quad (2.6)$$

où

$$k = \sqrt{\frac{h \mathcal{P}}{\lambda S}} \quad (2.7)$$

et le multiplicateur f vaut :

$$f = 1 \quad \text{pour une ailette longue (OK si } kL > 2 \ln 10) \quad (2.8)$$

$$f = \tanh kL \quad \text{pour une ailette adiabatique} \quad (2.9)$$

$$f = \frac{\tanh kL + \operatorname{Bi}}{1 + \operatorname{Bi} \tanh kL} \quad \text{pour une extrémité convective} \quad \left(\operatorname{Bi} = \frac{h_L}{k\lambda} \right) \quad (2.10)$$

Exercice 2.4 :

Un projecteur à LEDs dissipe 200 W à travers son socle carré d'arête $a = 10$ cm, sur lequel on souffle de l'air à 20°C , assurant un coefficient de convection $h = 80 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$.

- 1. Quelle est la température de la surface du socle ?*
- 2. Pour des raisons de sécurité, on veut ramener cette température à moins de 40°C . Pour cela, on place 8 ailettes en aluminium ($\lambda = 204 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$) ayant la forme de plaques planes, de largeur la taille du socle et d'épaisseur $e = 2$ mm.*

Calculez la nouvelle température du socle en supposant des ailettes infiniment longues (on pourra négliger la convection résiduelle par le socle entre les ailettes). Est-ce suffisant ?

- 3. Calculez le nombre d'ailettes infinies nécessaire pour atteindre la consigne.*
- 4. Quelle doit être la longueur de ces ailettes pour que l'hypothèse d'ailette infinie soit valable ?*
- 5. Pour des raisons d'encombrement, la longueur des ailettes ne doit pas dépasser 8 cm. Reprendre le calcul du nombre d'ailettes, en les supposant adiabatiques. Commentaires ?*

Comparez les masses d'aluminium mises en jeu dans les deux cas ($\rho = 2700 \text{ kg m}^{-3}$ pour l'aluminium).

2.1.3 Efficacité et rendement d'une ailette

On peut se poser deux questions :

1. De combien l'ailette augmente-t-elle le flux par rapport à une situation sans ailette ? C'est la notion d'*efficacité*.
2. Mes ailettes ne sont-elles pas trop longues (voir exercice précédent) ? C'est la notion de *rendement*.

L'*efficacité* est le flux à travers l'ailette sur celui en l'absence d'ailette, pour des températures de socle égales soit :

$$\epsilon_a = \frac{\dot{Q}}{hS(T_0 - T_\infty)}$$

L'expression (2.6) donne :

$$\epsilon_a = \frac{\lambda k}{h} f = \sqrt{\frac{\lambda \mathcal{P}}{hS}} f$$

efficacité d'une ailette.

CHAPITRE 2. AILETTES. QUADRIPÔLES

- L'efficacité est d'autant meilleure que l'ailette conduit bien la chaleur. Logique...
- elle est d'autant plus faible que le coefficient d'échange est grand. Cela peut sembler paradoxal mais dans un tel cas, on aurait déjà un bon échange sans ailette, donc l'efficacité d'en mettre une est mineure. Une ailette est efficace si elle améliore le transfert *par rapport à une situation sans ailette*.

Ainsi pour un échange de chaleur entre liquide et gaz, il est préférable de les mettre côté gaz puisque les coefficients d'échange y sont généralement plus faibles (cf. cours convection).

Le *rendement* est le flux aspiré par l'ailette rapporté à celui qu'aspirerait une ailette "parfaite", dont la conductivité est infinie. Cette dernière serait à température uniforme T_0 et évacuerait donc un flux $h\mathcal{P}L(T_0 - T_\infty)$. Le rendement est donc

$$\eta_a = \frac{\dot{Q}}{h\mathcal{P}L(T_0 - T_\infty)},$$

soit :

$$\eta_a = \frac{\lambda S k (T_0 - T_\infty) f}{h\mathcal{P}L(T_0 - T_\infty)} = \frac{k}{k^2 L} f = \frac{f}{kL}$$

rendement d'une ailette.

Ainsi pour une ailette longue, $\eta_a = 1/kL$, pour une ailette adiabatique $\eta_a = \tanh(kL)/kL$. On voit que dans les deux cas l'efficacité tend vers 0 quand la longueur tend vers ∞ .

Pour bien comprendre le concept, il faut réaliser qu'une ailette réelle conduit certes bien la chaleur, mais qu'elle présente malgré tout une résistance à la conduction. C'est ce qui fait que le profil de température décroît quand on s'éloigne de la base. Cette résistance fait que les lignes de flux préfèrent sortir par convection latérale près de la base de l'ailette qu'à son extrémité. Au voisinage de cette dernière l'écart entre la température de l'ailette et T_∞ est plus faible et donc l'échange convectif y est moins important. Pour une ailette idéale, de conductivité infinie, ce ne serait pas le cas, d'où son apparition dans la définition du rendement.

Exercice 2.5 :

Calculer les rendements des ailettes de l'exercice sur le projecteur.

L'exercice précédent illustre bien le concept d'efficacité. Avec une longueur trois fois inférieure, on obtient à peu près la même efficacité (donc économie de matière et d'encombrement) et le rendement faible de l'ailette la plus longue illustre qu'elle est pourrait être sérieusement raccourcie.

2.1.4 Efficacité et rendement d'un système d'ailettes

On considère un système thermique équipé de N ailettes identiques. On note :

S_a	Section d'une ailette
R_a	Résistance d'une ailette
ϵ_a	Efficacité d'une ailette
η_a	Rendement d'une ailette
S	Surface d'échange du système en l'absence d'ailettes
N	Nombre d'ailettes
$\dot{Q}_0 = hS(T_0 - T_\infty)$	Puissance échangée en l'absence d'ailettes
$\dot{Q}_a = \epsilon_a hS_a(T_0 - T_\infty)$	Puissance échangée par une ailette
$\dot{Q}_{a\infty} = \dot{Q}_a/\eta_a$	Puissance échangée par une ailette idéale
$\dot{Q}$	Puissance échangée totale

En présence d'ailettes, la puissance totale échangée est la somme de celle échangée par la surface $S - NS_a$ non équipée et de celle échangée à travers les N ailettes, soit :

$$\begin{aligned}
 \dot{Q} &= h(S - NS_a)(T_0 - T_\infty) + N\dot{Q}_a \\
 &= h(S - NS_a)(T_0 - T_\infty) + N\epsilon_a hS_a(T_0 - T_\infty) \\
 &= \underbrace{hS(T_0 - T_\infty)}_{\dot{Q}_0} + N(\epsilon_a - 1)hS_a(T_0 - T_\infty)
 \end{aligned}$$

L'efficacité du système d'ailettes est :

$$\epsilon_T = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_0} = \frac{\dot{Q}}{hS(T_0 - T_\infty)} = 1 + (\epsilon_a - 1)\frac{NS_a}{S}$$

On voit qu'elle bien sûr d'autant plus grande :

- que l'efficacité d'une ailette individuelle est grande
- que la densité surfacique d'ailettes NS_a/S est grande. Ce dernier point est à nuancer car des ailettes trop serrées peuvent ralentir l'écoulement d'air et donc diminuer le coefficient d'échange h .

Pour calculer le rendement, reprenons le calcul du flux total échangé ci-dessus, mais si les ailettes étaient idéales :

$$\begin{aligned}
 \dot{Q}_{\text{idéal}} &= h(S - NS_a)(T_0 - T_\infty) + N\dot{Q}_{a\infty} \\
 &= h(S - NS_a)(T_0 - T_\infty) + N\frac{\dot{Q}_a}{\eta_a} \\
 &= h(S - NS_a)(T_0 - T_\infty) + N\frac{\epsilon_a}{\eta_a}hS_a(T_0 - T_\infty) \\
 &= \underbrace{hS(T_0 - T_\infty)}_{\dot{Q}_0} + N\left(\frac{\epsilon_a}{\eta_a} - 1\right)hS_a(T_0 - T_\infty)
 \end{aligned}$$

rendement est donné par :

$$\begin{aligned}\eta_T &= \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{\text{idéal}}} = \frac{hS(T_0 - T_\infty) + N(\epsilon_a - 1)hS_a(T_0 - T_\infty)}{hS(T_0 - T_\infty) + N(\epsilon_a/\eta_a - 1)hS_a(T_0 - T_\infty)} \\ &= \frac{1 + (\epsilon_a - 1)NS_a/S}{1 + (\epsilon_a/\eta_a - 1)NS_a/S}\end{aligned}$$

Pour un système de N ailettes identiques :

$$\text{Efficacité} \quad \epsilon_T = 1 + (\epsilon_a - 1) \frac{NS_a}{S} \quad (2.11)$$

$$\text{Rendement} \quad \eta_T = \frac{1 + (\epsilon_a - 1)NS_a/S}{1 + (\epsilon_a/\eta_a - 1)NS_a/S} \quad (2.12)$$

2.2 Quadripôles en régime stationnaire

L'ailette est finalement un dipôle thermique, comme en témoignent les calculs précédents. La raison est que quelle que soit la condition à l'extrémité, il existe un tube de courant rentrant par la base, et terminant sur une surface isotherme à T_∞ (certes cette dernière a une forme bizarre...).

Que se passe-t'il si on empile des corps semblables aux ailettes ? Le problème est qu'on ne sait plus écrire une condition à l'extrémité (la température, le flux ou bien une combinaison linéaire des deux). Qu'à cela ne tienne, si on suppose l'extrémité isotherme, il suffit d'appeler T_2 sa température et Q_2 le flux à travers cette surface (voir Fig. 2.1. Les équations (2.3) et (2.4) sont toujours valables et on a toujours :

$$T(x) - T_\infty = A \operatorname{ch} kx + B \operatorname{sh} kx \quad \text{avec} \quad k = \left(\frac{h\mathcal{P}}{\lambda S} \right)^{1/2} \quad (2.13)$$

En appliquant cette relation en 1 et 2, on a les équations :

$$T_1 - T_\infty = A \quad (2.14a)$$

$$T_2 - T_\infty = A \operatorname{ch} kL + B \operatorname{sh} kL \quad (2.14b)$$

Les flux $-\lambda S \partial T / \partial x$ s'écrivent, en $x = 0$ et en $x = L$:

$$\dot{Q}_1 = -\lambda S k B \quad (2.15a)$$

$$\dot{Q}_2 = -\lambda S k (A \operatorname{sh} kL + B \operatorname{ch} kL) \quad (2.15b)$$

On cherche à exprimer les températures et flux en 2 en fonction de ceux en 1. En combinant les équations précédentes, on obtient :

$$\begin{bmatrix} T_2 - T_\infty \\ \dot{Q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} kL & -R \operatorname{sh} kL \\ -\frac{1}{R} \operatorname{sh} kL & \operatorname{ch} kL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 - T_\infty \\ \dot{Q}_1 \end{bmatrix}, \quad \text{où} \quad R = \frac{1}{\lambda S k} \quad (2.16)$$

Exercice 2.6 : prouvez-le à partir des équations (2.14) et (2.15).

On appelle cette formulation *quadripôle* (elle est aussi courante en électricité, en acoustique des solides etc), et la matrice s'appelle *matrice de transfert*. Sous forme condensée :

$$[U_2] = [M][U_1] \quad \text{où} \quad [U] = \begin{bmatrix} T - T_\infty \\ \dot{Q} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Si on a plusieurs milieux $1 \dots n$ en cascade, on voit l'intérêt : il suffit de multiplier les matrices de transfert $[M_i]$ entre elles pour obtenir les conditions à l'extrémité en fonction de celles à la base.

On note que le déterminant de la matrice est 1 et que les termes diagonaux sont égaux ce qui traduit la réversibilité de la formulation, pour un système passif (i.e. sans apport ou retrait d'énergie).

Exercice 2.7 : pourquoi ?

On peut généraliser cette formulation à d'autres configurations. Par exemple, pour une simple résistance thermique (Fig. 1.1). On a $\dot{Q}_2 = \dot{Q}_1$ et $T_1 - T_2 = R\dot{Q}$ donc :

$$\begin{bmatrix} T_2 - T_\infty \\ \dot{Q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 - T_\infty \\ \dot{Q}_1 \end{bmatrix}$$

On peut utiliser cette matrice pour une couche mince, par exemple une couche de colle ou de graisse conductrice.

Exercice 2.8 :

On considère un milieu 1D similaire au précédent, mais dans lequel il existe une source volumique Q_v (en W m^{-3} , c'est ce qu'on notait $\mathcal{P}$ au début du cours...) uniforme dans l'espace (positive si de l'énergie est cédée au milieu, par exemple de l'effet Joule).

1. *En reprenant le bilan effectué pour les ailettes, montrez que la solution à la même forme mais en remplaçant T_∞ par $T_\infty + T_Q$ où :*

$$T_Q = \frac{Q_v S}{hP}$$

Montrez que la formulation usuelle (2.17) du quadripôle doit être remplacée par :

$$[U_2] = [M][U_1] + ([I] - [M])[U_Q]$$

où $[U] = \begin{bmatrix} T - T_\infty \\ \dot{Q} \end{bmatrix}$, $[I]$ est la matrice identité et $[U_Q]$ est un vecteur que

l'on explicitera.

Enfin, il est possible d'associer un schéma électrique en T équivalent à un quadripôle (Fig. 2.4).

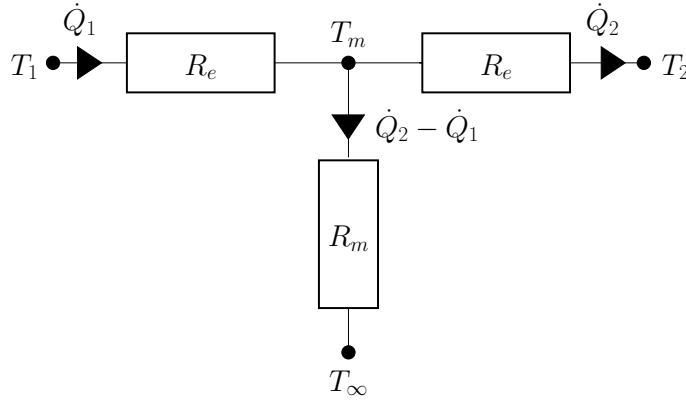


FIGURE 2.4 – Circuit en T équivalent à un quadripôle.

On montre que de façon générale, pour un quadripôle de matrice $\begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix}$, on a :

$$A = 1 + \frac{R_e}{R_m} \quad B = - \left(2R_e + \frac{R_e^2}{R_m} \right) \quad C = -\frac{1}{R_m}$$

(on peut vérifier que le déterminant vaut 1). En inversant ces formules, on obtient :

$$R_m = \frac{-1}{C} \quad R_e = \frac{1 - A}{C}$$

En appliquant ce résultat au quadripôle thermique, on obtient, pour le quadripôle (2.16) :

$$R_m = \frac{R}{\text{sh } kL} \quad R_e = \frac{1 - \text{ch } kL}{\text{sh } kL} = R \tanh \frac{kL}{2}$$



2.3 Quadripôles en régime instationnaire

Considérons maintenant un problème instationnaire mais toujours mono-dimensionnel, entre les abscisses 0 et L . Il est régi par l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

et on suppose la température initiale uniforme T_0 . Comme vu au chapitre 3, on peut poser $u(x, t) = T - T_0$ et prendre la transformée de Laplace et l'équation de la chaleur devient :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{p}{a} U$$

On peut noter qu'il s'agit formellement de la même équation que celle des ailettes (2.3), et la solution est donc formellement la même que (2.4), en remplaçant k par $\kappa = \sqrt{p/a}$.

$$U(x, p) = A(p) \operatorname{ch} \kappa x + B(p) \operatorname{sh} \kappa x \quad \text{avec} \quad \kappa = \sqrt{\frac{p}{a}}$$

Les équations (2.14a)- (2.15b) restent donc aussi identiques, et en remplaçant $T - T_\infty$ par $U(p)$ et $\dot{Q}$ par :

$$\Phi(p, x) = -\lambda \frac{\partial U}{\partial x}$$

On obtient au final :

$$\begin{bmatrix} U_2(p) \\ \Phi_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \kappa L & -\frac{\operatorname{sh} \kappa L}{\lambda S \kappa} \\ -\lambda S \kappa \operatorname{sh} \kappa L & \operatorname{ch} \kappa L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(p) \\ \Phi_1(p) \end{bmatrix}$$

On peut ainsi chaîner les milieux en cascade. On obtient à la fin des fonctions de p qu'il faut inverser. On utilisera en général une méthode numérique pour ce faire (voir polycopié Jannot 2011).

Exercice 2.9 : reprenez le calcul pour vous faire la main.

Chapitre 3

Problèmes diffusifs instationnaires

3.1 Rappel des équations

3.1.1 Transfert de chaleur

L'équation de la chaleur s'écrit dans le cas général.

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \mathbf{grad} T) + \mathcal{P} \quad (3.1)$$

où $\mathcal{P}$ est un terme source/puit. On supposera en général λ constant¹ et donc :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T + \frac{\mathcal{P}}{\lambda} \quad (3.2)$$

où $a = \lambda/\rho c_p$ est la diffusivité thermique (dimension $L^2 T^{-1}$). Avant de se lancer dans des calculs complexes, on peut déduire de la dimension de a que :

- Pendant un temps Δt , la chaleur diffuse sur une distance de l'ordre de $\sqrt{a \Delta t}$,
- Le temps nécessaire pour que la chaleur diffuse sur une distance L est de l'ordre de L^2/a .

La patate chaude

Se “refiler la patate chaude” signifie en langage courant déléguer une tâche ingrate à son voisin, qui en fait de même avec le voisin suivant etc. L'origine du terme est liée au retrait d'une patate du four avec les mains : on peut le faire parce qu'on a un peu de temps avant se brûler. Si on balance la patate à son voisin dans ce court intervalle, on ne se brûle pas, et ainsi de suite. Le retard est lié à un temps

1. Dans l'absolu c'est faux. En particulier la température d'un gaz augmente avec la température, mais si on se limite à des températures raisonnables c'est une bonne approximation

de diffusion à travers l'épiderme jusqu'aux nerfs sensitifs.

En *chaque point de la surface* S enserrant le volume d'étude, on doit imposer une condition à choisir parmi (on note $\mathbf{n}$ la normale sortante à la surface) :

- température imposée (rarement réalisable pratiquement)

$$T = T_S \quad \text{pour } (x, y, z) \in S, \forall t > 0 \quad (3.3)$$

- flux normal imposé à la surface (par exemple le flux solaire) :

$$-\lambda \mathbf{grad} T \cdot \mathbf{n} = q_S \quad \text{pour } (x, y, z) \in S, \forall t > 0 \quad (3.4)$$

- flux proportionnel à la différence de température entre surface et température d'un fluide circulant le long de la surface, par convection forcée ou naturelle :

$$-\lambda \mathbf{grad} T \cdot \mathbf{n} = h (T - T_\infty) \quad \text{pour } (x, y, z) \in S, \forall t > 0 \quad (3.5)$$

Il faut bien garder à l'esprit que T_S , q_S , h et T_∞ ne sont pas forcément constants. Il peuvent dépendre du point de la surface considérée, et *aussi du temps*. Par exemple la condition imposée sur un mur extérieur exposé à l'air ambiant serait du type (3.5) avec T_∞ température de l'air extérieur variant périodiquement avec l'alternance jour/nuit.

Une condition de rayonnement est également envisageable (et superposable aux Eqs (3.4), (3.5)) sous la forme :

$$-\lambda \mathbf{grad} T \cdot \mathbf{n} = \sigma \epsilon (T^4 - T_\infty^4) \quad \text{pour } (x, y, z) \in S, \forall t > 0 \quad (3.6)$$

Cette dernière conduit à une résolution analytique délicate car elle n'est pas linéaire (à cause de l'exposant 4 sur T).

Il faut également spécifier une condition initiale qui donne le champ de température dans le milieu à $t = 0$.

$$T(x, y, z, t = 0) = T_0(x, y, z) \quad (3.7)$$

3.1.2 Transfert de matière

On supposera en général que l'on peut se ramener à une équation de diffusion, éventuellement avec un terme réactif (voir les subtilités Sec. ??) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_A}{\partial t} &= D_{AB} \nabla^2 C_A + R_A && \text{en molaire} \\ \frac{\partial \rho_A}{\partial t} &= D_{AB} \nabla^2 \rho_A + r_A && \text{en massique} \end{aligned}$$

Aux frontières, on peut imposer :

- la concentration

$$\begin{aligned} C_A &= C_{A,S} && \text{en molaire} \\ \rho_A &= \rho_{A,S} && \text{en massique} \end{aligned}$$

- le flux. Problème : lequel ? diffusif ? total ? En général l'équation ci-dessus est obtenue par une hypothèse fournissant au final $\mathbf{N}_A = \mathbf{J}_A$ et donc on impose le flux diffusif :

$$\begin{aligned} -D_{AB} \mathbf{grad} C_A \cdot \mathbf{n} &= J_{A,S} && \text{en molaire} \\ -D_{AB} \mathbf{grad} \rho_A \cdot \mathbf{n} &= j_{A,S} && \text{en massique} \end{aligned}$$

- une combinaison linéaire des deux, associée en général à un transfert convectif à l'extérieur :

$$\begin{aligned} -D_{AB} \mathbf{grad} C_A \cdot \mathbf{n} &= k(C_A - C_{A,\infty}) && \text{en molaire} \\ -D_{AB} \mathbf{grad} \rho_A \cdot \mathbf{n} &= k(\rho_A - \rho_{A,\infty}) && \text{en massique} \end{aligned}$$

3.2 Résolution analytique milieu semi-infini

Il existe plusieurs méthodes, on se limitera ici aux transformées de Laplace.

3.2.1 Transformée de Laplace

On trouvera du matériel détaillé en annexe A.

Elle transforme une fonction du temps, $t \in [0, +\infty[$ (et éventuellement des variables spatiales) en une fonction d'une variable notée p (et des mêmes variables spatiales que la fonction originale) :

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (3.8)$$

Cette transformation est linéaire. Son intérêt est que dériver la fonction originale revient à multiplier par p sa transformée :

$$\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) - f(t=0) \quad (3.9)$$

Il existe des tables de transformées de Laplace. On notera que la transformée d'une fonction échelon unité :

$$H(t < 0) = 0, \quad H(t > 0) = 1,$$

est $1/p$ (et non pas 1, erreur classique...)

Exercice 3.1 :

a) *Prouvez-le.*

b) *Calculez la transformée de Laplace de la fonction rampe :*

$$\begin{aligned} R(t) &= 0 & \text{pour } t < 0 \\ R(t) &= t & \text{pour } t \geq 0 \end{aligned}$$

Cela permet de résoudre des équations aux dérivées partielles faisant intervenir le temps. Une fois la solution obtenue en fonction de p il faut revenir à t , ce qui n'est pas toujours aisé.

3.2.2 Exemple du mur semi-infini

Le mur semi-infini est un modèle de milieu non limité dans l'espace à droite, et dont la paroi de gauche peut être soumise à différentes conditions (température, flux, échange convectif). Les autres dimensions n'interviennent pas parce que l'on suppose que le flux de chaleur (ou de matière) est dirigé suivant l'axe perpendiculaire à la face de gauche (Fig. 3.1).

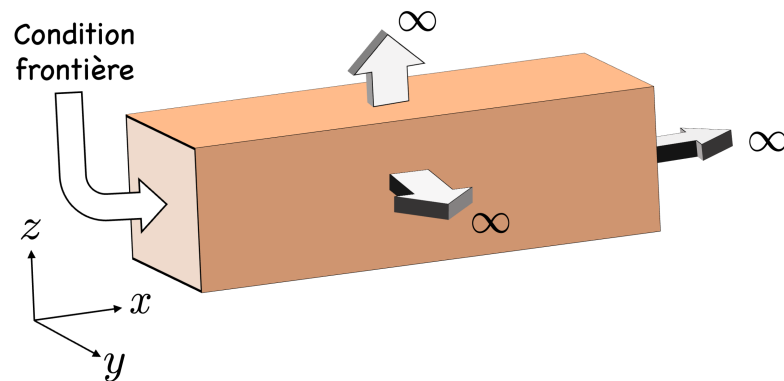


FIGURE 3.1 – Concept de milieu semi-infini

Un tel milieu est bien sûr fictif et l'on verra sous quelle condition il peut représenter la réalité d'un milieu limité sur sa droite.

Exemple :

On considère un milieu semi-infini mono-dimensionnel initialement à température uniforme T_0 . À $t = 0$, on porte la température de sa face libre en $x = 0$ à T_1 . On cherche $T(x, t)$, $\forall x > 0, \forall t > 0$.

Les équations sont :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \forall x > 0, \forall t > 0 \quad (3.10)$$

$$T(x = 0, t) = T_1, \quad \forall t > 0 \quad (3.11)$$

$$T(x \rightarrow +\infty, t) \text{ fini}, \quad \forall t > 0 \quad (3.12)$$

$$T(x, t = 0) = T_0, \quad \forall x > 0 \quad (3.13)$$

Remarques :

- On notera que le milieu étant semi-infini, la condition aux limites sur sa paroi “de droite” se limite à indiquer que la température reste finie.
- Notez qu’on a bien spécifié sur chaque ligne à quelles valeurs de x et t l’équation s’appliquait. C’est important de le faire, au moins au début.

Dans la formule de dérivation (A.2), le $f(0)$ est en général gênant, et on peut le faire disparaître en posant au préalable :

$$u(x, t) = T(x, t) - T_0$$

Le problème se réécrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \forall x > 0, \forall t > 0 \quad (3.14)$$

$$u(x = 0, t) = T_1 - T_0, \quad \forall t > 0 \quad (3.15)$$

$$u(x \rightarrow +\infty, t) \text{ fini}, \quad \forall t > 0 \quad (3.16)$$

$$u(x, t = 0) = 0, \quad \forall x > 0 \quad (3.17)$$

On prend ensuite la transformée de Laplace par rapport à la variable t :

$$U(x, p) = \mathcal{L}[u(x, t)]$$

et en utilisant la règle de dérivation, on obtient :

$$pU = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \forall x > 0, \forall p \quad (3.18)$$

$$U(x = 0, p) = \frac{T_1 - T_0}{p}, \quad \forall p \quad (3.19)$$

$$U(x \rightarrow +\infty, p) \text{ fini}, \quad \forall \quad (3.20)$$

On voit que l’équation de diffusion, qui est une équation aux dérivées partielles se transforme en équation différentielle en x :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{p}{a} U$$

dont la solution générale est, classiquement :

$$U(x, p) = A(p) \exp\left(-x\sqrt{\frac{p}{a}}\right) + B(p) \exp\left(x\sqrt{\frac{p}{a}}\right)$$

(on notera que U dépend quand même de p et que les constantes d'intégration doivent donc dépendre aussi de p).

Comme la solution doit rester finie quand $x \rightarrow +\infty$, on a forcément $B(p) = 0$. La condition (3.19) donne :

$$A(p) = \frac{T_1 - T_0}{p},$$

et on a donc finalement :

$$U(x, p) = \frac{T_1 - T_0}{p} \exp\left(-x\sqrt{\frac{p}{a}}\right) \quad (3.21)$$

C'est ici qu'apparaît en général la difficulté de revenir à une fonction de t avec les tables de transformées inverses (on en trouvera une particulièrement bien adaptée à la thermique dans le cours de Jannot 2011, p. 122, reproduite partiellement en annexe, Sec. A.4.2). Ici, on trouve :

$$u(x, t) = (T_1 - T_0) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$$

soit au final :

$$\frac{T(x, t) - T_0}{T_1 - T_0} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \quad (3.22)$$

La fonction erfc est représentée Fig. 3.2, et quelques valeurs tabulées de erfc et erfc^{-1} sont présentées Tab. 3.1. On trouvera plus d'information dans l'annexe B.

z	0	0.1	0.2	0.5	0.8	1	1.2	1.5	2	2.5
$\operatorname{erfc}(z)$	1	0.888	0.777	0.48	0.258	0.157	0.0897	0.0339	0.00468	0.000407

z	0.001	0.002	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	0.75	1
$\operatorname{erfc}^{-1}(z)$	2.33	2.19	1.98	1.82	1.64	1.39	1.16	0.906	0.477	0.225	0

TABLE 3.1 – Valeurs tabulées de erfc et erfc^{-1}

3.2.3 Longueur/temps de diffusion

Au-delà de la technique de résolution, qu'il convient de bien maîtriser mais n'est pas le point le plus important, de nombreuses conclusions physiques peuvent être déduites de l'expression précédente.

- La solution dépend du temps et de l'espace mais à travers la variable combinée $\eta = x/2\sqrt{at}$. Cela signifie que la température est la même en tout point de l'espace-temps où cette grandeur est constante. Par exemple : la température en $2x$ en $4t$ sera la même que celle en x à t .

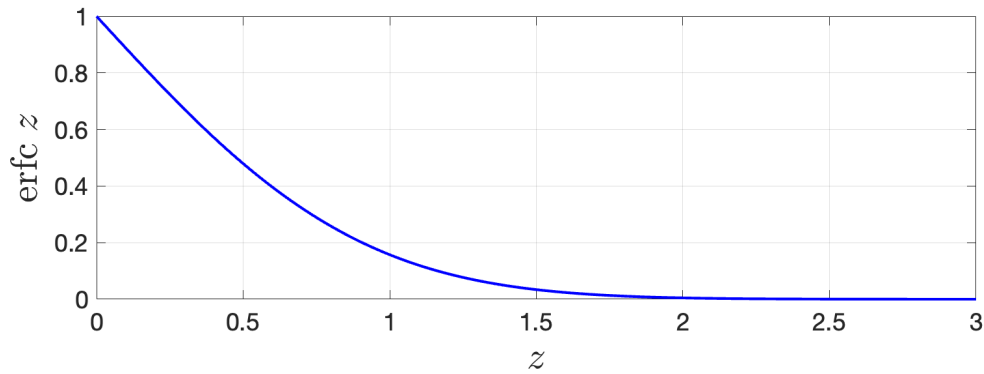


FIGURE 3.2 – Fonction erfc

- La quantité (3.22) est toujours comprise entre 0 et 1, donc la température en tout point du milieu est comprise entre T_0 et T_1 .
- Elle n'atteint T_1 qu'en $x = 0$ (normal c'est imposé...) ou en $t \rightarrow +\infty$. Il faudrait donc un temps infini pour que le milieu s'équilibre avec la température imposée sur sa paroi de gauche. Normal, le milieu est infini...
- Si on ré-écrit la solution en fonction de la variable $\eta = x/2\sqrt{at}$:

$$\frac{T(x, t) - T_0}{T_1 - T_0} = F(\eta), \quad \text{où} \quad F(\eta) = \text{erfc } \eta,$$

on peut calculer la profondeur de la zone où la température est affectée par l'élévation de la température imposée à la frontière gauche : ce sont les valeurs de (x, t) telles que $F(\eta) > \epsilon$. Prenons (arbitrairement) $\epsilon = 0.005$, cela donne $\eta \leq 2$, soit $x \leq 4\sqrt{at}$. On en déduit qu'à un instant t , la température a augmenté significativement dans une zone d'épaisseur $4\sqrt{at}$ (peu importe le 4, c'est la loi en $\sqrt{at}$ qui compte...). On appelle cette grandeur *épaisseur de diffusion*. On retrouve la conclusion évoquée plus haut (revoir la patate chaude à la lueur de ce dernier résultat).

- D'une façon alternative, au bout de combien de temps Δt la chaleur aura diffusé sur une longueur L ? quand $\eta(L, \Delta t) = 2$ soit $t = t_D = L^2/16a$.

La figure (3.3) montre les profils de température obtenus pour $\frac{t_D}{9}$, $\frac{t_D}{4}$, t_D , $4t_D$, $9t_D$.

Exercice 3.2 : (inspiré du site CPGE du Lycée Henri Parriat)

1. Joseph Fourier veut inviter quelques amis pour goûter et leur préparer un bon gâteau dont il a le secret. La semaine dernière il a invité 6 personnes, mais aujourd'hui ils sont 10. Il prévoit la quantité de pâte en conséquence mais utilise le même moule d'environ 30 cm de diamètre.

Sachant que la semaine dernière, son gâteau était parfaitement cuit en 30 minutes, quel sera le temps de cuisson aujourd'hui ?

2. Jean-Baptiste Biot, qui a répondu à l'invitation et arrive toujours en avance dit à Fourier : « mais non, ton gâteau est un petit corps, ton calcul est erroné : le temps de cuisson varie proportionnellement à la masse ! »

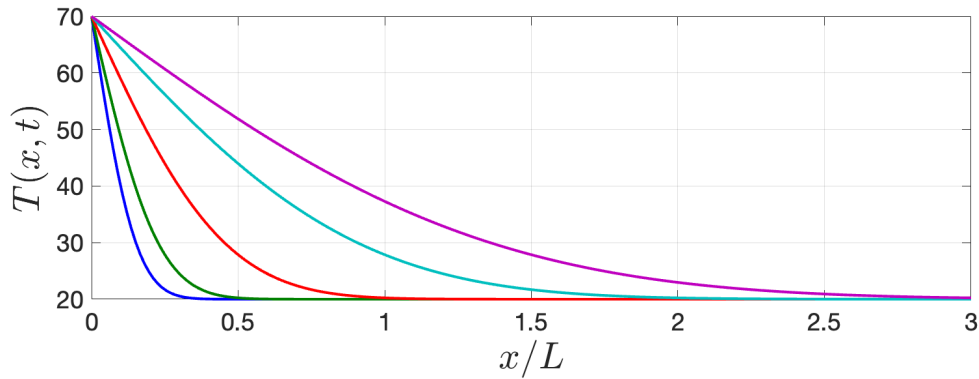


FIGURE 3.3 – Profil de température calculé par (3.22) ($T_0 = 20^\circ\text{C}$, $T_1 = 70^\circ\text{C}$) pour des temps $\frac{t_D}{9}$, $\frac{t_D}{4}$, t_D , $4t_D$, $9t_D$, où $t_D = L^2/16a$ (on a pris $L = 1\text{ mm}$).

Formalisez son argument. Sinon, le gâteau est-il un petit corps ?

(on supposera que sa conductivité thermique est de l'ordre de celle de l'eau pendant toute la cuisson et on prendra $h = 10\text{ W m}^{-2}\text{ K}^{-1}$)

Exercice 3.3 : (suite du précédent)

Vous arrivez dans ces entrefaites (vous êtes invité aussi) et, pris à partie par les deux interlocuteurs, vous proposez d'élever le débat au dessus du fait que le gâteau est oui ou non un petit corps.

- Mettez en évidence les deux temps caractéristiques qui influent sur le temps de cuisson.*
- Analysez la situation dans les deux cas $\text{Bi} \gg 1$ et $\text{Bi} \ll 1$.*
- Qui de vos deux fameux interlocuteurs a raison dans chaque cas ?*

3.2.4 Flux. Effusivité thermique

Dans l'exemple de l'échelon de température, on peut calculer la densité de flux en tout point. La dérivée de $\text{erfc } z$ est $-2/\sqrt{\pi} \exp(-z^2)$, d'où :

$$q(x, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) = \lambda (T_1 - T_0) \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{at}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right)$$

Les flux les plus importants sont ceux aux temps court et au voisinage de la paroi. Le flux transmis au milieu par unité de surface est $q(x = 0, t)$, soit :

$$q_0 = \lambda (T_1 - T_0) \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{at}} = \frac{\sqrt{\lambda \rho c_p}}{\sqrt{\pi t}} (T_1 - T_0) = \frac{b}{\sqrt{\pi t}} (T_1 - T_0)$$

On remarque que le flux diminue asymptotiquement vers 0 en $1/\sqrt{t}$: à mesure que la chaleur diffuse dans le mur, le gradient de température au voisinage de la face libre diminue (voir Fig. 3.3).

La quantité $b = \sqrt{\lambda \rho c_p}$ s'appelle *effusivité thermique*, importante dans les problèmes de contact.

Exercice 3.4 : Reprendre l'exemple précédent en changeant la condition à la frontière en $x = 0$:

On impose un échelon de flux entrant q_0 . On exprimera le résultat sous la forme :

$$T(x, t) - T_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{q_0 \sqrt{t}}{b} F(\eta) \quad \text{où} \quad \eta = \frac{x}{2\sqrt{at}}$$

et b est l'effusivité thermique.

Avant tout calcul, il est conseillé de tracer qualitativement la solution.

La condition de flux s'écrit :

$$-\lambda \mathbf{grad} T \cdot \mathbf{e}_x = q_0 \quad \text{pour } (x, y, z) \in S, \forall t > 0$$

soit :

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x = 0, t) = -\frac{q_0}{\lambda}$$

ce qui assure que la pente du profil de température en $x = 0$ est toujours la même.

En posant encore $u(x, t) = T(x, t) - T_0$, la solution est toujours $U(x, p) = A(p) \exp(-x\sqrt{p/a})$. La transformée de Laplace de la condition de flux donne maintenant :

$$\lambda \sqrt{\frac{p}{a}} A(p) = \frac{q_0}{p}$$

d'où :

$$A(p) = \frac{q_0}{\lambda} \frac{1}{p \sqrt{p/a}}$$

soit finalement :

$$U(x, p) = \frac{q_0}{\lambda} \frac{1}{p \sqrt{p/a}} \exp\left(-x\sqrt{\frac{p}{a}}\right)$$

dont la transformée inverse est (voir Sec. A.4.2 en annexe) :

$$U(x, t) = \frac{q_0}{\lambda} 2\sqrt{at} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} - \eta \operatorname{erfc} \eta \right) \quad \text{où} \quad \eta = \frac{x}{2\sqrt{at}}$$

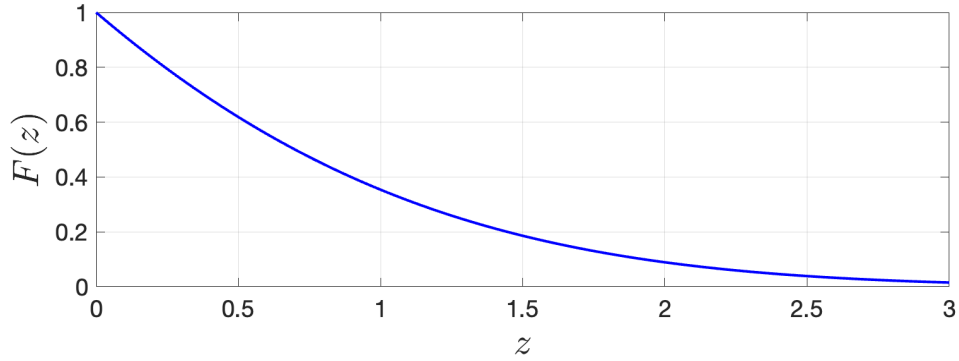
On peut reformuler le résultat en faisant apparaître l'effusivité b . En effet, puisque :

$$\frac{\sqrt{a}}{\lambda} = \frac{\sqrt{\lambda \rho c_p}}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho c_p}} = \frac{1}{b}$$

on a :

$$T(x, t) - T_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{q_0 \sqrt{t}}{b} \underbrace{\left(e^{-\eta^2} - \sqrt{\pi} \eta \operatorname{erfc} \eta \right)}_{F(\eta)}$$

La fonction $F(\eta)$ (qu'on a définie comme ça pour que $F(0) = 1$) est tracée ci-dessous :



3.2.5 Contact thermique.

On met en contact deux solides semi-infinis, initialement à des températures T_{01} et T_{02} . Quelle est la température de la surface de contact ?

Il faut résoudre une équation de la chaleur dans chaque milieu, et les solutions sont comme précédemment :

$$T_1(x, p) - T_{01} = A_1(p) \exp \left(-x \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right), \quad x > 0 \quad (3.23)$$

$$T_2(x, p) - T_{02} = A_2(p) \exp \left(x \sqrt{\frac{p}{a_2}} \right), \quad x < 0 \quad (3.24)$$

Les flux en $x = 0$ s'écrivent :

$$q_1(p) = \lambda_1 \sqrt{\frac{p}{a_1}} A_1(p) = b_1 \sqrt{p} A_1(p)$$

$$q_2(p) = -\lambda_2 \sqrt{\frac{p}{a_2}} A_2(p) = -b_2 \sqrt{p} A_2(p)$$

Ce flux doit être continu à l'interface (sinon cette dernière accumulerait de l'énergie) et donc $q_1 = q_2$ soit :

$$\lambda_1 \sqrt{\frac{1}{a_1}} A_1(p) = -\lambda_2 \sqrt{\frac{1}{a_2}} A_2(p)$$

soit en exprimant les diffusivités $a = \lambda / \rho c_p$:

$$\sqrt{\lambda_1 \rho_1 c_{p1}} A_1(p) = -\sqrt{\lambda_1 \rho_1 c_{p1}} A_2(p)$$

CHAPITRE 3. PROBLÈMES DIFFUSIFS INSTATIONNAIRES

On voit apparaître les effusivités $b = \sqrt{\lambda \rho c_p}$, et on a donc $A_1(p)/A_2(p) = -b_2/b_1$. On note $T_C = T_1(x=0, t) = T_2(x=0, t)$ la température de contact. En divisant les deux expressions (3.23) et (3.24) exprimées en $x=0$, on a donc :

$$\frac{T_C - T_{01}}{T_C - T_{02}} = \frac{A_1(p)}{A_2(p)} = \frac{-b_2}{b_1}$$

En résolvant cette équation pour T_C , on obtient :

$$T_C = \frac{b_1 T_{10} + b_2 T_{20}}{b_1 + b_2} \quad (3.25)$$

Remarques finales :

- Bien que le problème soit instationnaire, la température de contact est constante au cours du temps (on remarque d'ailleurs qu'aucune transformation de Laplace inverse n'a été nécessaire pour calculer T_C).
- La température de contact est plus proche du milieu de plus grande effusivité $b = \sqrt{\lambda \rho c_p}$. Cela explique la sensation de froid si on marche sur du carrelage, ce qui n'est pas le cas si on marche sur du bois.

Exercice 3.5 : Vérifiez le dernier point (pour les données, voir Izard & Lelong 2006, attention aux notations et unités...).

3.2.6 Validité de l'hypothèse milieu semi-infini.

Supposons un milieu d'épaisseur e . L'hypothèse sera valable si la chaleur n'a pas le temps de diffuser jusqu'à la paroi opposée, en $x=e$. Ceci sera vrai pour des temps suffisamment courts, tels que l'épaisseur de diffusion $4\sqrt{at}$ correspondante soit très petite devant e , soit :

$$t \ll \frac{e^2}{16a}$$

Exercice 3.6 : Pour mesurer les propriétés thermiques d'un matériau, on taille un parallélépipède et on éclaire une de ses faces avec une lampe infrarouge. On mesure alors la température de cette face au cours du temps et on analyse le résultat en supposant le milieu semi-infini.

- a) Pendant combien de temps la mesure a-t-elle un sens ?
- b) Quelle précaution supplémentaire doit on prendre ?
- c) Quelle grandeur peut-on mesurer par cette méthode ?

3.2.7 Exemple en transfert de matière

Exercice 3.7 : Vous prenez une douche très chaude et très longue. Du coup l'humidité absolue de votre salle de bain augmente notablement pendant 15 min et passe de 6 g/kg AS à 13 g/kg AS (voir cours air humide). La température ne varie pas et reste à 20 °C. On suppose que la première couche du mur est faite d'un matériau de 12 cm dont la résistance à la diffusion vaut $\mu = 60$, qu'on suppose initialement en équilibre avec la salle de bain.

De quelle profondeur la vapeur d'eau pénètre-t-elle dans le plâtre pendant les 15 minutes de moiteur ? Peut-on justifier l'hypothèse de corps semi-infini ?

Notes d'interprétation de l'énoncé :

- la concentration en vapeur C_v s'exprime en fonction de l'humidité absolue w par (voir Chap. 4) :

$$C_v = \frac{p_0}{RT} \frac{w}{w + 0.622}$$

- le coefficient de diffusion effectif de la vapeur dans un matériau de résistance μ est $D = D_{av}/\mu$, où $D_{av} = 2.6 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ est le coefficient de diffusion de la vapeur dans l'air.

3.3 Milieux finis

Rien n'empêche d'appliquer la méthode des transformées de Laplace en milieu fini. Mais on tombera généralement sur des fonctions de p dont on ne sait pas trouver une transformée inverse sous forme analytique, où éventuellement sous forme de série. On pourra malgré tout utiliser des méthodes numériques pour effectuer la transformation de Laplace inverse (voir polycopié Jannot 2011). Il peut être également intéressant d'utiliser le formalisme des quadripôles lorsque plusieurs milieux d'épaisseur finie sont chaînés.

Il existe aussi une méthode très générale appelée *méthode de séparation des variables* dont l'utilisation dépasse le domaine de la thermique. Ce genre de problème est en général très calculatoire, et ne fournit la solution que sous forme de série. Cette dernière fournit malgré tout des résultats précieux et des suggestions d'approximations. Nous montrons ici son emploi dans un cas simple, d'autres exemples étant traités en exercice.

3.3.1 Conditions aux frontières constantes.

Si les conditions aux frontières ne varient pas, un régime permanent sera atteint au bout d'un temps infini, comme décrit dans le premier chapitre. On s'intéresse au régime transitoire qui précède. Il faut commencer par déterminer la solution en

CHAPITRE 3. PROBLÈMES DIFFUSIFS INSTATIONNAIRES

régime permanent T_{RP} .

Examinons un problème 1D particulier pour illustrer la méthode. On prend un mur d'épaisseur e , échelon de température imposé à gauche, échelon de température imposé à droite.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.26)$$

$$T(x = 0, t) = T_L \quad (3.27)$$

$$T(x = e, t) = T_R \quad (3.28)$$

$$T(x, t) = T_0 \quad (3.29)$$

Le régime permanent s'obtient trivialement :

$$T_{\text{RP}}(x) = T_L + (T_R - T_L) \frac{x}{e}$$

On pose ensuite :

$$u(x, t) = T(x, t) - T_{\text{RP}}(x) \quad (3.30)$$

qui représente l'écart au régime permanent. Dans la nouvelle variable, les conditions frontières deviennent homogènes (c'est-à-dire un truc = 0) puisque les conditions de départ sont déjà vérifiées par la solution en régime permanent (on peut le vérifier mathématiquement).

On obtient donc le problème :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.31)$$

$$u(x = 0, t) = 0 \quad (3.32)$$

$$u(x = e, t) = 0 \quad (3.33)$$

$$u(x, t) = T_0 - T_{\text{RP}}(x) = u_0(x) \quad (3.34)$$

Note importante : il est fondamental de se ramener à un problème homogène pour appliquer la méthode qui suit.

Ensuite on cherche des solutions sous la forme $u(x, t) = X(x)T(t)$. L'équation devient :

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a} \frac{T'}{T} = -k^2$$

et par conséquent :

$$X'' + k^2 X = 0$$

dont les solutions sont $A \cos kx + B \sin kx$. La condition homogène en $x = 0$ impose $A = 0$ et celle en $x = e$ impose :

$$\sin ke = 0$$

(B ne peut être nul sinon on a la solution nulle), ce qui n'est possible que si :

$$k_n = n \frac{\pi}{e}$$

qu'on appelle valeurs propres. Les seules fonctions X_n admissibles (appelées fonctions propres) sont donc de la forme :

$$X_n(x) = \sin k_n x = \sin \left(n\pi \frac{x}{e} \right)$$

On montre qu'elles sont forcément orthogonales², c'est-à-dire que :

$$\int_0^e X_n(x) X_m(x) dx = 0 \quad \text{si } n \neq m \quad (3.35)$$

On résout maintenant l'équation en t :

$$T'(t) + k_n^2 a T(t) = 0$$

qui donne :

$$T(t) = \exp(-k_n^2 a t) = \exp \left(-n^2 \left(\frac{\pi}{e} \right)^2 a t \right)$$

Puisque toutes les valeurs entières de n sont possibles, la solution est une somme infinie de toutes les solutions élémentaires soit :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin k_n x \exp(-k_n^2 a t)$$

où les coefficients A_n sont indéterminés. C'est l'application de la condition initiale qui va les fixer. Cette dernière impose que :

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin k_n x$$

On multiplie par $\sin k_m x$, où m arbitraire et on intègre sur $[0, e]$:

$$\int_0^e u_0(x) \sin k_m dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^e A_n \sin k_n x \sin k_m x dx$$

La condition d'orthogonalité (3.35) fait disparaître tous les termes de la somme sauf celui pour lequel $n = m$ et donc :

$$\int_0^e u_0(x) \sin k_m dx = A_m \int_0^e \sin^2 k_m x dx$$

ce qui donne :

$$A_m = \frac{\int_0^e u_0(x) \sin k_m x dx}{\int_0^e \sin^2 k_m x dx} = \frac{I_N}{I_D}$$

(on voit au passage très clairement que les coefficients de la série A_m sont entièrement déterminés par la condition initiale...)

2. Ce genre de problème appartient à une classe de problèmes homogènes plus générale, dits "problèmes de Sturm-Liouville"

CHAPITRE 3. PROBLÈMES DIFFUSIFS INSTATIONNAIRES

Il reste à calculer les intégrales I_N et I_D . Cette dernière vaut :

$$I_D = \frac{1}{k_m} \int_0^{k_m e} \sin^2 u \, du = \frac{1}{k_m} \left(\frac{k_m e}{2} - \frac{\sin 2k_m e}{4} \right) = \frac{e}{2}$$

où on a utilisé $k_m e = n\pi$.

Pour I_N , rappelons qu'on a :

$$u_0(x) = T_0 - T_{RP}(x) = \underbrace{T_0 - T_L}_{\alpha} + \underbrace{(T_L - T_R)}_{\beta} \frac{x}{e}$$

qui est de la forme $\alpha + \beta \frac{x}{e}$, et on est donc amené à calculer les deux intégrales :

$$I_0 = \int_0^e \sin k_m x \, dx \quad \text{et} \quad I_1 = \int_0^e \frac{x}{e} \sin k_m x \, dx$$

et on aura ensuite $I_N = \alpha I_0 + \beta I_1$. La première vaut :

$$I_0 = \frac{1 - \cos k_m e}{k_m} = \frac{1 - (-1)^m}{m\pi} e$$

Pour la seconde on intègre par parties :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^e \frac{x}{e} \sin k_m x \, dx = \frac{1}{k_m^2 e} \int_0^{k_m e} u \sin u \, du \\ &= \frac{1}{k_m^2 e} \left[\left[-u \cos u \right]_0^{k_m e} + \int_0^{k_m e} \cos u \, du \right] \\ &= \frac{1}{k_m^2 e} [-k_m e \cos k_m e + \sin k_m e] \\ &= -\frac{\cos k_m e}{k_m} = -(-1)^m \frac{e}{m\pi} \end{aligned}$$

Au final le coefficient A_m vaut :

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{I_N}{I_D} = \frac{\alpha I_0 + \beta I_1}{e/2} \\ &= \left[2\alpha \frac{1 - (-1)^m}{m\pi} - 2\beta (-1)^m \frac{1}{m\pi} \right] \\ &= \frac{2}{m\pi} [1 - (-1)^m] (T_0 - T_L) - (T_L - T_R)(-1)^m \\ &= \frac{2}{m\pi} [(-1)^m (T_R - T_0) - (T_L - T_0)] \end{aligned}$$

En réunissant tous les résultats, on obtient³ :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n\pi} [(-1)^n (T_R - T_0) - (T_L - T_0)] \sin \left(n\pi \frac{x}{e} \right) \exp \left[-(n\pi)^2 \frac{at}{e^2} \right]$$

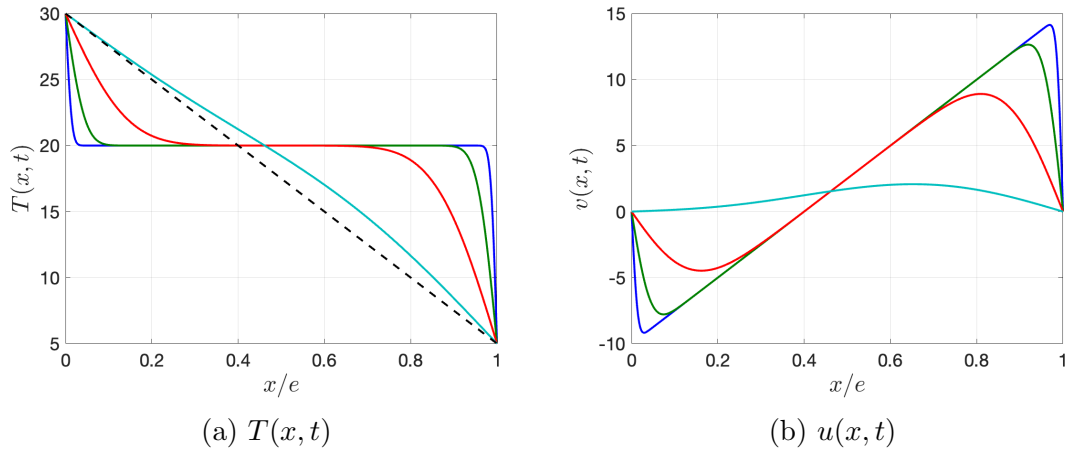


FIGURE 3.4 – Profils de température au cours du temps, pour $t = 0.001 t_D$, $0.01 t_D$, $0.1 t_D$, t_D , où $t_D = e^2/16a$. À gauche : $T(x, t)$; la ligne pointillée représente le régime permanent $T_{RP}(x)$. À droite : $u(x, t) = T(x, t) - T_{RP}(x)$.

Cette solution tend bien vers 0 aux temps longs (rappel : $u(x, t)$ représente l'écart au régime permanent). La solution est représentée Fig. 3.4.

Pour les temps de plus en plus longs, le terme exponentiel dans la série devient très faible pour des n de plus en plus petits, et le nombre de termes à sommer devient de plus en plus faible. Ceci est illustré Fig. 3.5, qui indique les profils calculés avec différents nombres de termes pour des temps croissants. On voit que pour des temps suffisamment longs, il devient inutile de sommer un trop grand nombre de termes. En revanche pour $t = 0.001 e^2/16a$, un nombre trop faible de termes engendre des oscillations qui ne sont pas physiques.

3. Le résultat doit être invariant par la transformation $x \longleftrightarrow e - x$ et $L \longleftrightarrow R$. C'est bien le cas. Cool...

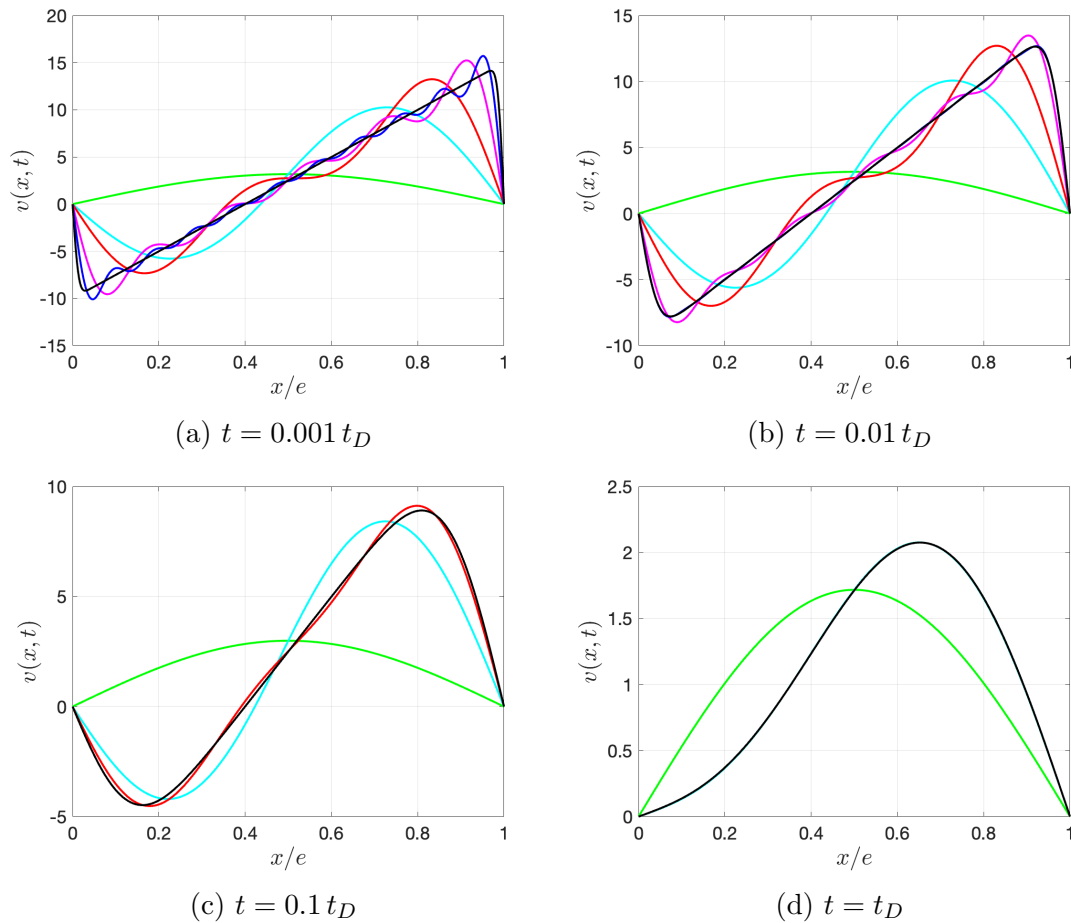


FIGURE 3.5 – Profils $u(x, t) = T(x, t) - T_{RP}(x, t)$ pour : (a) $t = 0.001 t_D$ (b) $0.01 t_D$ (c) $0.1 t_D$, (d) t_D , où $t_D = e^2/16a$. Les 6 courbes représentent les solutions obtenues avec 100, 20, 10, 5, 2 et 1 termes

Exercice 3.8 :

Reprendre l'exemple précédent avec une condition de flux à gauche et une température imposée à droite.

Quelles sont les valeurs propres et les fonctions propres ?

3.3.2 Conditions aux frontières oscillantes.

Ces cas fondamentaux sont *rencontrés très fréquemment*, par exemple dans le bâtiment où les murs subissent l'alternance jour/nuit. On trouvera un exemple traité dans l'exercice « Flux périodique sur un mur d'épaisseur finie », qui illustre bien les effets d'inertie dans des parois et les déphasages de température qui en résultent. La lourdeur des calculs pourra rebuter le lecteur, mais heureusement, ce type de problème offre une simplifications dans un cas extrême.

Considérons un milieu fini d'épaisseur e auquel on impose une condition fixe d'un côté et périodique dans le temps de l'autre avec une période T . Par exemple :

Exemple :

Sur la paroi de gauche on impose une densité de flux sinusoïdale de fréquence ω , de moyenne q_m et d'amplitude Δq :

$$q_0(t) = q_m + \Delta q \sin(\omega t)$$

Sur la paroi de droite, la température est imposée à T_D qui est aussi la température initiale. Le problème s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \forall x \in [0, e], \forall t > 0 \quad (3.36)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x=0, t) = q_0(t), \quad \forall t > 0 \quad (3.37)$$

$$T(x=e, t) = T_D, \quad \forall t > 0 \quad (3.38)$$

$$T(x, t=0) = T_D, \quad \forall x \in [0, e] \quad (3.39)$$

L'idée est la suivante : on cherche le profil de température au bout d'un temps très grand, où le régime sera purement périodique.

Comme vu précédemment, le temps de diffusion à travers le milieu est de l'ordre de $\tau_D = e^2/a$. Si $\tau_D \ll 1/\omega$, alors à l'échelle d'une période d'oscillation la diffusion est instantanée. Tout se passe comme si la variation temporelle de la condition frontière étant infiniment lente. Dans ce cas, à chaque instant le milieu est quasiment en X régime permanent. On parle d'*approximation quasi-stationnaire*.

Dans ce cas on peut chercher la solution comme si on était en régime permanent, mais ce dernier varie à chaque instant. Dans l'exemple précédent, un profil linéaire mais variant au cours du temps.

Exemple :

On envisage un profil linéaire de la forme :

$$T(x, t) = A(t)x + B(t)$$

La condition en flux donne :

$$-\lambda A(t) = q_0(t) \quad \Rightarrow \quad A(t) = \frac{-q_0(t)}{\lambda}$$

et la condition en température donne :

$$A(t)e + B(t) = T_D \quad \Rightarrow \quad B(t) = T_D + \frac{q_0(t)}{\lambda}e$$

et le profil de température s'écrit finalement :

$$T(t) = T_D + \frac{q_0(t)}{\lambda} (e - x)$$

On peut remarquer que la solution ne vérifie pas l'équation de la chaleur. Mais si on adimensionnalise cette dernière par :

$$t^* = \omega t \quad x^* = \frac{x}{e}$$

on obtient :

$$\underbrace{\frac{e^2 \omega}{a}}_{2\pi\tau_D/T \ll 1} \frac{\partial T}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^{*2}}$$

Le coefficient de la dérivée temporelle est très $\ll 1$ et on peut donc le négliger, ce qui fournit un problème « presque » stationnaire. C'est bien ce qu'on a fait...

3.3.3 Hypothèse **quasi-stationnaire**.

L'hypothèse **quasi-stationnaire** peut aussi être effectuée efficacement lorsque des milieux en série ont des inerties thermiques très différentes. Le moins inerte peut alors être considéré comme étant en régime permanent pour simplifier les calculs. C'est le cas lorsque l'on a un matériau très fin (couche de colle, de pâte thermique, film etc.)

Exercice 3.9 : Un mur en béton d'épaisseur $e_B = 40$ cm est recouvert d'une couche $e_I = 6$ cm de laine de verre maintenue par une épaisseur $e_P = 1$ cm de placoplâtre. La température intérieure est de 18°C et la température extérieure chute de 10°C . On cherche le profil de température dans toutes les épaisseurs.

Simplifier la mise en équation du problème en argumentant.

Matériaux	λ ($\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$)	ρ (kg m^{-3})	c_p ($\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$)
Béton	2	2400	880
Isolant	0.04	30	1000
Plâtre	0.35	1000	1000

Chapitre 4

Air humide

4.1 Introduction. Définition

L'air humide est un mélange de gaz qu'on peut considérer comme parfaits : de l'air (qui est lui même un mélange de GPs) et de la vapeur d'eau. La particularité de l'air humide est que la vapeur est condensable dans des conditions ambiantes. Un air humide peut donc perdre de la vapeur par condensation ou bien en gagner par évaporation d'un liquide avec lequel il est en contact. Un air humide n'est donc pas en général un système fermé puisqu'il peut échanger de l'eau avec l'extérieur.

Toutes les équations ci-dessous sont sous entendues à pression constante p_0 . En général, pour des applications courantes, cette pression sera une atmosphère, soit 101 325 Pa. De nombreux problèmes sont néanmoins plus complexes. Par exemple, la pression totale chute avec l'altitude, si bien qu'un mouvement ascendant d'air humide dans l'atmosphère voit une pression totale variable.

4.1.1 Rappel : mélange de gaz

Considérons un mélange de deux gaz A et B. Les fractions molaires et massiques de l'espèce A sont définies par :

$$x_A = \frac{n_A}{n_A + n_B} \quad \omega_A = \frac{m_A}{m_A + m_B} = \frac{n_A M_A}{n_A M_A + n_B M_B}$$

et idem pour les fractions x_B et ω_B .

Les deux gaz occupent *le même volume*, et s'ils peuvent être considérés comme parfaits, ils se comportent comme s'ils étaient seuls à leur pression partielle $p_i = p_0 x_i$. On a donc :

$$p_A V = n_A \mathcal{R} T \quad p_B V = n_B \mathcal{R} T$$

Les concentrations vérifient donc :

$$p_A = C_A \mathcal{R}T \quad p_B = C_B \mathcal{R}T$$

4.1.2 Rappel : équilibre liquide vapeur

Si un liquide est en équilibre avec sa vapeur à une température T , la pression p est *fixée* et vaut $p_{\text{sat}}(T)$, pression de vapeur saturante. Réciproquement, si la pression est fixée, la température vaut $T_{\text{eb}}(p)$. On ne peut donc pas varier indépendamment pression et température d'une vapeur en équilibre avec son liquide (cela découle de la règle de la variance).

Attention : pour qu'un tel équilibre ait lieu, le système doit être a priori fermé : votre bouteille d'eau, la cocotte-minute etc.

Si la vapeur est mélangée avec un autre gaz (les deux étant supposés parfaits), alors c'est sa *pression partielle* p_v qui vaut $p_{\text{sat}}(T)$.

Exercice 4.1 :

Quelle est la pression partielle de vapeur au-dessus de l'eau dans votre bouteille ? Quelle est sa fraction molaire ?

On a vu que pour un système qui n'est pas en équilibre, on pouvait se rabattre sur un équilibre local. C'est le cas d'un verre d'eau ou un flaqué : à l'interface, il y a équilibre entre liquide et vapeur, et au voisinage de cette dernière, la pression partielle de vapeur vaut $p_{\text{sat}}(T)$. Mais ce n'est pas le cas dans la pièce, où la concentration de vapeur est plus faible ! La vapeur va donc diffuser de la surface de l'eau vers la pièce (voir Chap. ??). Pour compenser ce départ, de l'eau va s'évaporer pour maintenir $p = p_{\text{sat}}(T)$ à la surface. Bref votre verre va finir par se vider. . .

4.2 Équations de l'air humide

En thermodynamique, on construit souvent des grandeurs molaires ou massiques, en divisant par le nombre de moles ou la masse totale, parce que cette dernière est constante dans les systèmes fermés.

Pour l'air humide, l'usage est différent (et souvent déroutant au début) : comme la quantité de vapeur peut varier, on divise les grandeurs par la masse d'air, ce qu'on dit à l'oral en utilisant l'expression "par kg d'air sec".

Par ailleurs, on posera dans toute la suite le rapport des masses molaires de l'eau et de l'air :

$$\mu_v = \frac{M_v}{M_a} = \frac{18.015 \text{ g mol}^{-1}}{28.965 \text{ g mol}^{-1}} \simeq 0.622$$

4.2.1 Humidité et grandeurs liées

L'humidité absolue est définie par :

$$w = \frac{m_v}{m_a} \quad (4.1)$$

Si on travaille sur des écoulements, on définira plutôt $w = \dot{m}_v/\dot{m}_a$, choix pratique puisque la conservation de la masse d'air assure que $\dot{m}_a = C^{\text{te}}$. Si les propriétés de l'air humide ne sont pas uniformes dans l'espace, on a alors $w = dm_v/dm_a$. On remarquera que l'humidité absolue est une grandeur sans dimension. Cela dit, comme sa valeur est par essence faible (cf. exercice plus loin), on l'exprime souvent en g kg^{-1} que l'on note classiquement g/kg AS (AS signifiant "air sec").

L'humidité relative est définie par :

$$\psi = \frac{p_v}{p_{\text{sat}}(T)} \quad (4.2)$$

où p_v est la pression partielle de vapeur d'eau et p_{sat} la pression de vapeur saturante. Elle varie entre 0 (air complètement sec, $p_v = 0$) et 1 (air saturé en eau, $p_v = p_{\text{sat}}(T)$). On l'exprime souvent en %. Par définition, elle dépend de la température. Aussi, lorsque l'on chauffe un air humide, ψ va varier alors que w restera constant.

La fraction massique de vapeur peut s'écrire :

$$\omega_v = \frac{m_v}{m_a + m_v} = \frac{w}{1 + w} \quad (4.3)$$

et sa fraction molaire :

$$x_v = \frac{n_v}{n_a + n_v} = \frac{m_v/M_v}{m_a/M_a + m_v/M_v} = \frac{w}{\mu_v + w} \quad (4.4)$$

On obtient donc des relations liant w et ψ en écrivant que $p_v = x_v p_0$:

$$\psi = \frac{p_0}{p_{\text{sat}}(T)} \frac{w}{\mu_v + w} \quad (4.5)$$

$$w = \frac{\mu_v \psi}{p_0/p_{\text{sat}}(T) - \psi} \quad (4.6)$$

Exercice 4.2 : à partir des expressions ci-dessus :

a) *Quel est la plus grande humidité absolue que vous pourriez rencontrer dans vos voyages ?*

b) *Quelle est l'ordre de grandeur de l'erreur relative que l'on fait en confondant fraction massique et humidité absolue ?*

Les relations précédentes montrent notamment que l'humidité absolue est limitée par la valeur maximale (croissante avec T) :

$$w_{\max}(T) = \frac{\mu_v}{p_0/p_{\text{sat}}(T) - 1}$$

Autrement dit, à une température donnée, il est impossible d'avoir une quantité de vapeur supérieure à cette valeur dans l'air humide : l'air humide est saturé. Si on diminue la température d'un tel air humide, nécessairement de la vapeur doit se condenser.

Pour calculer $p_{\text{sat}}(T)$, on peut utiliser la loi d'Antoine :

$$\log_{10} \frac{p_{\text{sat}}(T)}{1 \text{ bar}} = A - \frac{B}{T_{(K)} + C}$$

avec $A = 4.654\,30$, $B = 1435.264$, $C = -64.848$.

4.2.2 Volume spécifique. Densité

Il est utile de disposer du volume *par masse d'air sec* :

$$v = \frac{V}{m_a} =$$

$$= \frac{RT}{p_0 M_a} \left(1 + \frac{w}{\mu_v} \right) \quad (4.7)$$

Cette relation permet de déduire la masse d'air sec du volume (ou plus couramment le débit d'air sec à partir du débit volumique, notamment dans les centrales de traitement de l'air).

La masse volumique de l'air humide (attention, cette fois on compte la masse totale, pas seulement celle de l'air) est :

$$\rho = \frac{m_a + m_v}{V} =$$

$$= \frac{p_0 M_a}{RT} \frac{\mu_v (1 + w)}{\mu_v + w} \quad (4.8)$$

Le pré-facteur $M_a p_0 / (RT)$ est la densité ρ_a d'un air sec, et il est facile de montrer que $\mu_v(1+w)/(\mu_v+w) \leq 1$ et décroît avec w . Par conséquent :

Un air humide est toujours plus léger qu'un air sec, à température donnée.

Remarque : on peut le voir facilement en faisant un développement limité de (4.8) par rapport à w (qui est petit devant 1 et devant μ_v) :

$$\rho = \frac{p_0 M_a}{RT} \left(1 - w \frac{1 - \mu_v}{\mu_v} \right) \simeq \rho_a (1 - 0.608 w)$$

4.2.3 Énergie

L'enthalpie de l'air humide est la somme des enthalpies de l'air et de la vapeur :

$$H(m_a, m_v, T) = m_a h_a + m_v h_v$$

les enthalpies massiques étant données pour des gaz parfaits par :

$$\begin{aligned} h_a(T) &= h_a(T_0) + c_{p_a}(T - T_0) \\ h_v(T) &= h_v(T_0) + c_{p_v}(T - T_0) \end{aligned}$$

où on suppose (avec une bonne approximation) les c_p massiques constants. Il est commode de choisir l'état standard¹ de référence pour l'eau comme étant l'eau liquide 0 °C, soit $T_0 \simeq 0$ °C. On a alors :

$$h_v(T) = L_v(T_0) + c_{p_v}(T - T_0) = L_v + c_{p_v} \theta$$

où $L_v(T_0)$ est l'enthalpie de vaporisation à 0 °C, que l'on note simplement L_v pour simplifier les notations, où $\theta = T - T_0$ est la température en °C. On a donc finalement l'enthalpie d'un air humide :

$$H(m_a, m_v, T) = m_a c_{p_a} \theta + m_v (c_{p_v} \theta + L_v)$$

où θ est la température en °C. Les données sont :

$$c_{p_a} = 1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}, \quad c_{p_v} = 1820 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}, \quad L_v = 2.5013 \text{ MJ/kg}.$$

Il est pratique de définir l'enthalpie par unité de masse d'air sec (cette dernière restant souvent constante dans les transformations) :

1. Rappel un état standard spécifie la pression : 1 bar mais pas la température...

$$h(w, \theta) = \frac{H(m_a, m_v, T)}{m_a} = c_{p_a} \theta + w(L_v + c_{p_v} \theta) \quad (4.9)$$

Cette expression montre toute la singularité de l'air humide : on peut augmenter l'énergie d'un air humide, soit en augmentant sa température (comme pour n'importe quel système thermodynamique), soit en augmentant son humidité, donc sa teneur en eau.

- Cela signifie qu'on peut absorber de l'énergie dans un air humide, sans augmenter sa température mais en vaporisant de l'eau.
- Cela est important pour le réchauffement climatique : en fait c'est l'énergie interne du système terre/atmosphère qui augmente, et l'on voit que cela est aussi possible en augmentant la vapeur d'eau dans l'atmosphère sans augmenter sa température.

Exercice 4.3 :

Le titre de la section est "énergie" et on a calculé l'enthalpie.

- À votre avis, pourquoi ?*
- Calculez l'énergie interne de l'air humide par unité de masse d'air sec.*

Dans l'expression (4.9), le second terme de la parenthèse est négligeable de telle sorte que :

$$h(w, \theta) \simeq c_{p_a} \theta + w L_v \quad (4.10)$$

Ainsi ajouter 4g/kg AS dans un air humide correspond à la même augmentation d'énergie que l'échauffer de 10 °C à humidité absolue constante.

Exercice 4.4 :

- Vérifiez numériquement l'assertion précédente.*
- Vérifiez-la sur le diagramme de l'air humide.*

4.2.4 Température de saturation adiabatique

Considérons un air humide initialement insaturé ($\psi < 1$) et à la température θ , que l'on met en contact avec de l'eau liquide (une rivière, une paroi humide, des gouttes d'eau suspendues dans l'air, ...). On suppose que cet air est isolé thermiquement et subit donc une transformation adiabatique, mais il se charge en vapeur au contact du liquide jusqu'à saturation. Quelle est sa température finale ?

On peut calculer cette température, appelée température de saturation adiabatique $\theta_{\text{sat}}(\theta, w)$ (dite aussi de bulbe humide bien que légèrement différente de cette dernière...). Par des bilans de matière et d'énergie, on montre qu'elle est donnée par

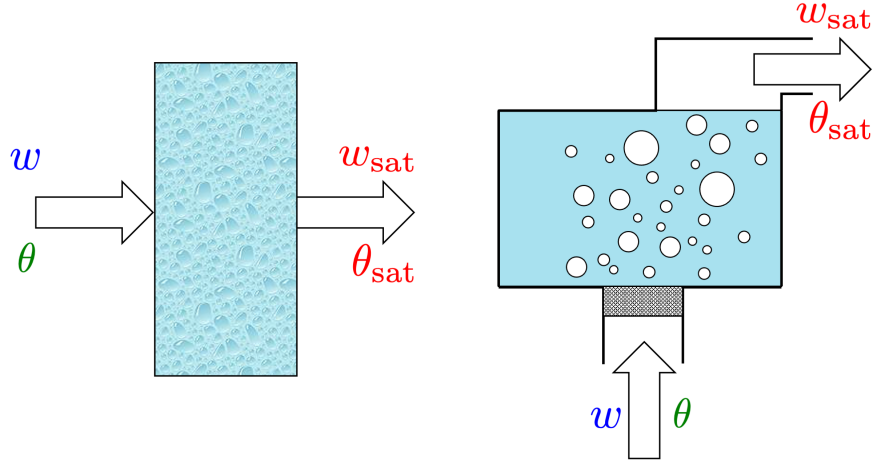


FIGURE 4.1 – Exemples de systèmes d’humidification d’un air humide. A gauche, l’air traverse une toile imbibée d’eau. A droite, on fait buller l’air dans de l’eau.

l’équation implicite en θ_{sat} :

$$c_{pa}\theta + w(L_v + c_{pv}\theta) + (w_{\text{sat}} - w)c_{pe}\theta = c_{pa}\theta_{\text{sat}} + w_{\text{sat}}(L_v + c_{pv}\theta_{\text{sat}}) \quad (4.11)$$

où w_{sat} est l’humidité absolue de l’air saturé en sortie. Puisque $\psi = 1$, on a, d’après (4.6) :

$$w_{\text{sat}} = \frac{\mu_v}{p_0/p_{\text{sat}}(\theta_{\text{sat}}) - 1} \quad (4.12)$$

Il faut comprendre l’équation (4.11) comme suit : deux airs humides différents (w_1, θ_1) et (w_2, θ_2) peuvent vérifier cette équation pour une valeur de θ_{sat} donnée. Bien que ces airs humides soient différents au départ, ils ont la même température de saturation adiabatique, c’est-à-dire que leur saturation en vapeur d’eau conduira à un air saturé à la même température θ_{sat} à la fin.

Exercice 4.5 : démontrez l’équation (4.11) en utilisant la conservation de l’eau et le premier principe en système ouvert.

Une autre façon d’énoncer le point précédent est de chercher tous les airs humides ayant la même température de saturation adiabatique, en traçant les courbes $\theta_{\text{sat}} = C^{\text{te}}$ dans le diagramme de l’air humide, autrement dit dans le plan (θ, w) . On appelle ces courbes *isothermes humides*. La forme (4.11) ne se prête guère à une interprétation graphique simple, mais on peut la ré-écrire :

$$c_{pa}(\theta - \theta_{\text{sat}}) + (w - w_{\text{sat}})L_v = c_{pv}(w_{\text{sat}}\theta_{\text{sat}} - w\theta) + (w - w_{\text{sat}})c_{pe}\theta \quad (4.13)$$

Les termes du second membre peuvent y être négligés en première approximation (pourquoi ?) et donc :

$$c_{pa}\theta + wL_v = c_{pa}\theta_{\text{sat}} + w_{\text{sat}}L_v \quad (4.14)$$

L'équation reste implicite en θ_{sat} , mais on voit clairement que, sous l'approximation (4.14), les iso- θ_{sat} sont donc des droites de pente $-c_{p_a}/L_v$. On peut également voir qu'à un terme en c_{p_v} près, le membre de gauche de (4.14) n'est autre que (4.9) l'enthalpie de l'air humide par unité de masse d'air sec :

Les isothermes humides sont quasiment confondues avec les isenthalpes dans le diagramme de l'air humide. Ce sont approximativement des droites dans le plan (θ, w) .

Exercice : Montrer l'approximation conduisant à l'équation (4.14)

Enfin, l'équation (4.14) montre clairement que $\theta_{\text{sat}} < \theta$ puisque $w_{\text{sat}} > w$. Autrement dit l'air humide se charge en vapeur jusqu'à la saturation, mais il doit refroidir puisque l'enthalpie doit rester constante.

Quelques conséquences importantes :

- C'est ainsi que l'on refroidit certaines terrasses de café en été^a, en pulvérisant de l'eau liquide.
- Ce principe est également utilisé dans les tours aéro-réfrigérantes, où l'on cherche à prélever de la chaleur à de l'eau liquide. Cette dernière est atomisée dans la tour et sature l'air "sec" environnant. Ce dernier est souvent l'air extérieur introduit à la base de la tour et circulant par convection naturelle, sous réserve que la tour soit assez haute.
- Très bonne méthode pour refroidir une pièce en été (bien que coûteuse en eau) : tendre un drap humide devant une fenêtre ou une porte.
- La transpiration permet de contrôler la température de notre corps même si la température extérieure est supérieure à 37°C. L'évaporation de la transpiration fait que nous ressentons une température $\theta_{\text{sat}} < \theta$. Comme tout humidificateur, cela consomme de l'eau liquide, qui nous oblige à bien nous hydrater en été
- La pipe à eau permet de refroidir les fumées de combustion, celles-ci étant aspirées sous forme de bulles à travers un liquide. Le mélange air + fumées se sature en vapeur d'eau et refroidit donc.
- Voir aussi le frigo du désert (alias "Zeer pot")...

a. et hélas aussi des stades de foot en plein désert...

Exercice 4.6 :

L'air d'une terrasse de café en été atteint 32°C, avec en moyenne une humidité de 50%. Le patron vous demande de concevoir un système de refroidissement par aspersion.

- a) *Quelle est l'humidité absolue dans ces conditions ?*
- b) *À quelle température pouvez-vous prétendre refroidir la terrasse ?*

4.2.5 Synthèse. Formulaire

Formules utiles

Relations humidités absolues et relatives :

$$w = \frac{\mu_v \psi}{p_0/p_{\text{sat}}(T) - \psi} \quad \psi = \frac{p_0}{p_{\text{sat}}(T)} \frac{w}{\mu_v + w}$$

Volume spécifique, enthalpie spécifique :

$$v = \frac{RT}{p_0 M_a} \left(1 + \frac{w}{\mu_v} \right) \quad h = c_{p_a} \theta + w (L_v + c_{p_v} \theta)$$

Température de saturation adiabatique :

$$c_{p_a} (\theta - \theta_{\text{sat}}) + (w - w_{\text{sat}}) L_v = c_{p_v} (w_{\text{sat}} \theta_{\text{sat}} - w \theta) + (w - w_{\text{sat}}) c_{p_v} \theta$$

$$\text{où } w_{\text{sat}} = \frac{\mu_v}{p_0/p_{\text{sat}}(\theta_{\text{sat}}) - 1}$$

Expression simplifiée :

$$c_{p_a} (\theta - \theta_{\text{sat}}) + (w - w_{\text{sat}}) L_v = 0 \quad \frac{\theta - \theta_{\text{sat}}}{w - w_{\text{sat}}} = - \frac{L_v}{c_{p_a}}$$

4.3 Diagramme de l'air humide

4.3.1 Principe

On a vu qu'un air humide dépendait de deux variables : température et humidité. Il est donc logique de représenter un air humide par un point dans un plan engendré par ces deux grandeurs.

Exercice 4.7 : quelle est la variance d'un air humide ? Est-ce compatible avec la remarque ci-dessus ?

Le plus courant est le diagramme psychrométrique² où l'on porte la température θ en abscisse et l'humidité absolue en ordonnée.

2. Psychro signifie en gros "sensation de froid" en grec.

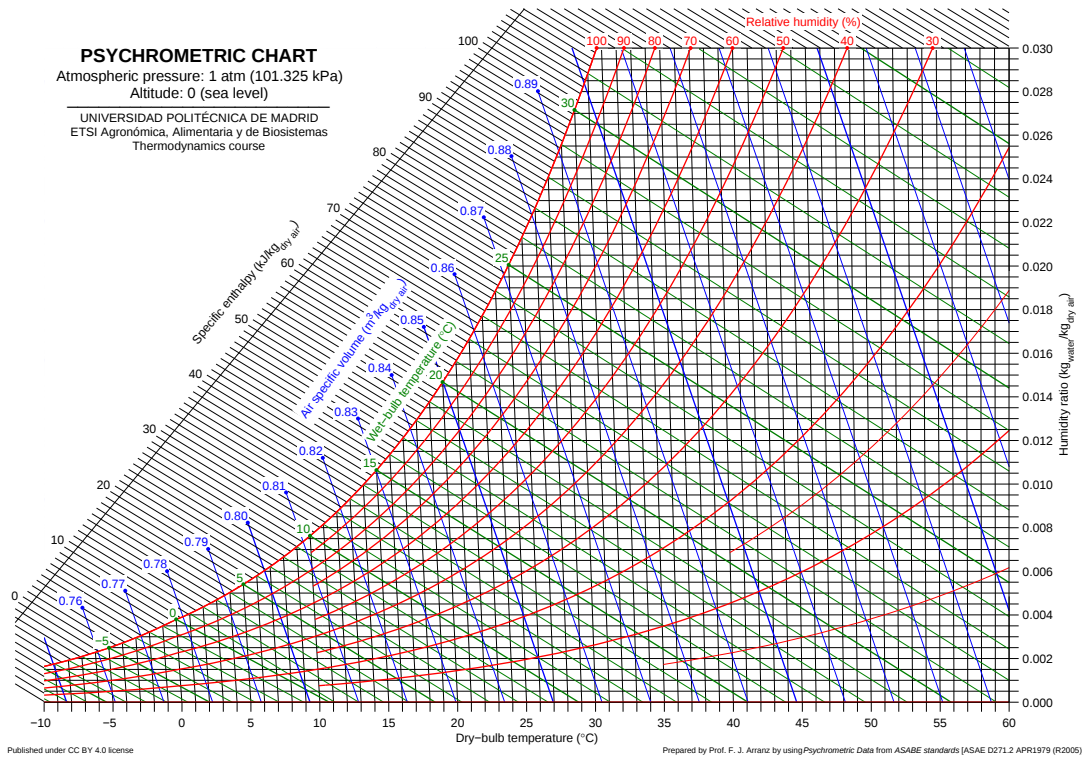


FIGURE 4.2 – Diagramme de l'air humide (source Wikipedia, F. J Arranz, CC BY 4.0 <<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0>>, via Wikimedia Commons). Les lignes rouges sont les iso-humidité relatives. Les lignes bleues sont les iso-volume molaire. Les lignes noires inclinées tracées à gauche de la courbe de saturation sont les isenthalpes. les lignes vertes sont les isothermes humides.

4.3.2 Structure

Dans ce plan, on peut tracer (Fig. 4.3) :

- les iso-humidité relative $\psi = C^{\text{te}}$, en rouge Fig. 4.2, calculables d'après (4.6). La courbe $\psi = 1$ correspond à un air humide saturé. Il n'existe aucun point représentatif d'un air humide à gauche de cette dernière.
- les iso-volume spécifique $v = C^{\text{te}}$, en bleu Fig. 4.2 calculables d'après (4.7). Ce sont quasiment des droites.
- les isenthalpes (lignes obliques en noir Fig. 4.2), calculables d'après (4.9). Ce sont quasiment des droites de pente $-c_{p_a}/L_v$ d'après (4.10).
- les iso-température humide (voir section suivante). Elles sont quasiment confondues avec les isenthalpes.

4.3.3 Utilisation

La donnée de deux grandeurs permet par construction de retrouver toutes les autres :

3. On peut vérifier d'après (4.6) que ce sont en gros les courbes d'équation $w = \mu_v \psi p_{\text{sat}}(T)/p_0$

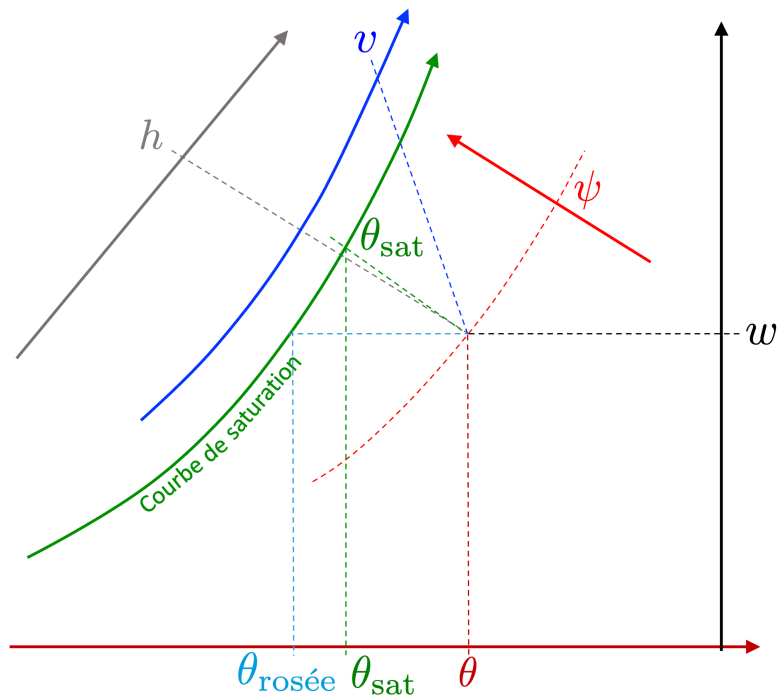


FIGURE 4.3 – Principe de lecture du diagramme de de l'air humide.

- le plus simple est lorsque l'on connaît w et θ puisque ce sont les axes principaux (Fig. 4.4a)
- on donne souvent l'humidité relative et la température θ . Il suffit d'intersecter la bonne courbe $\psi = C^{\text{te}}$ avec une droite verticale (Fig. 4.4b)
- la donnée de θ_{sat} et θ caractérise également un et un seul air humide (Fig. 4.4c). C'est le principe de la mesure de l'humidité par un double thermomètre, l'un sec, l'autre humide.
- mais on peut en fait déduire les caractéristiques de l'air humide à partir de n'importe quel couple de variable : par exemple (v, w) (Fig. 4.4d), ou bien (h, θ) , etc

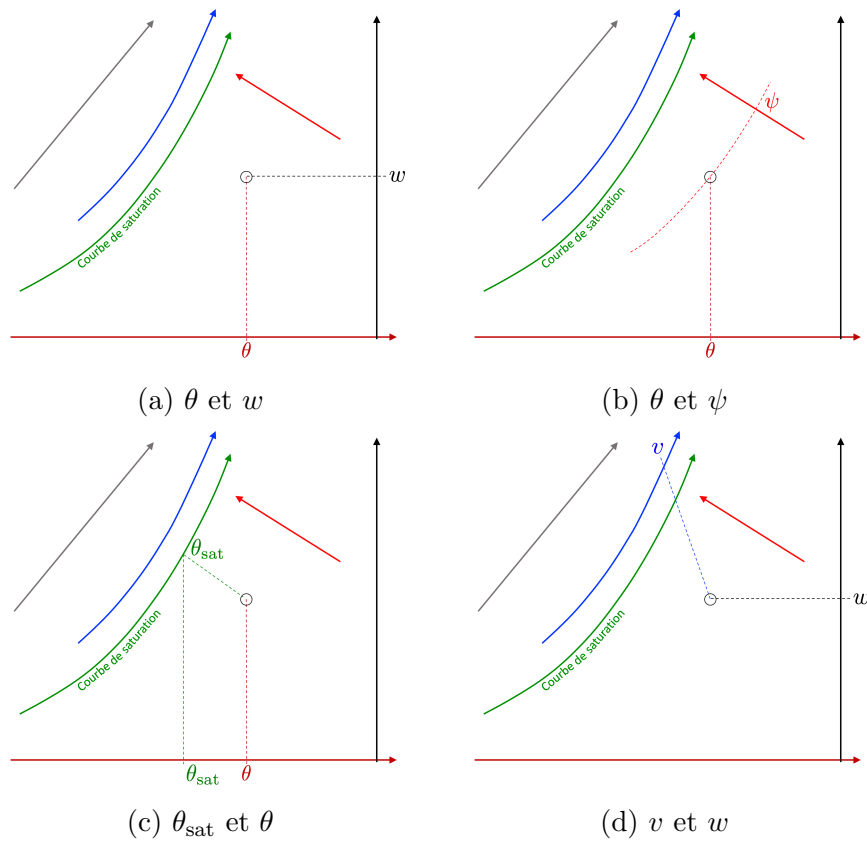


FIGURE 4.4 – Lecture du diagramme à partir de la donnée de différents couples.

Exemples :

- a) **Un bon confort domestique correspond à un air à 20°C et 50 % d'humidité. Quelle est alors l'humidité absolue ?**

On intersecte la courbe rouge $\psi = 50\%$ avec la droite verticale $\theta = 20^\circ\text{C}$. On obtient $w = 7.3 \text{ g/kg AS}$.

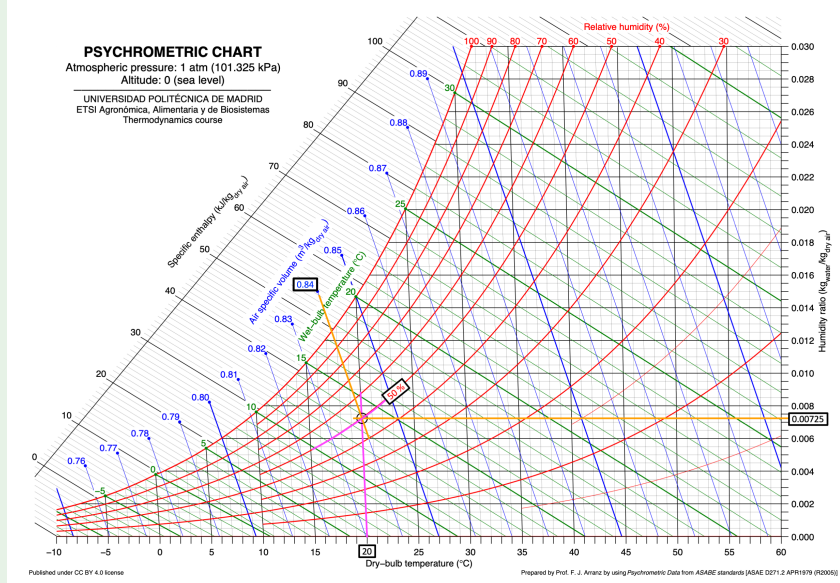
Votre bouteille vide de 1 L est remplie de cet air. Quelle masse d'air sec contient-elle ? Quelle masse de vapeur ?

On lit $v = 0.84 \text{ m}^3/\text{kg AS}$ et donc :

$$m_a = \frac{V}{v} = \frac{10^{-3} \text{ m}^3}{0.84 \text{ m}^3/\text{kg AS}} = 1.2 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

et la masse de vapeur

$$m_v = w m_a = 7.3 \times 10^{-3} \text{ kg/kg AS} \times 1.2 \times 10^{-3} \text{ kg} = 8.7 \times 10^{-6} \text{ kg}$$



La même bouteille vide (pour une raison obscure) a été fermée et mise au frigo (il y fait 3 °C).

De la vapeur va-t-elle se condenser ? Si oui, quelle masse ? Votre bouteille est en plastique et donc contractable. Quelle variation de volume a subi la bouteille ?

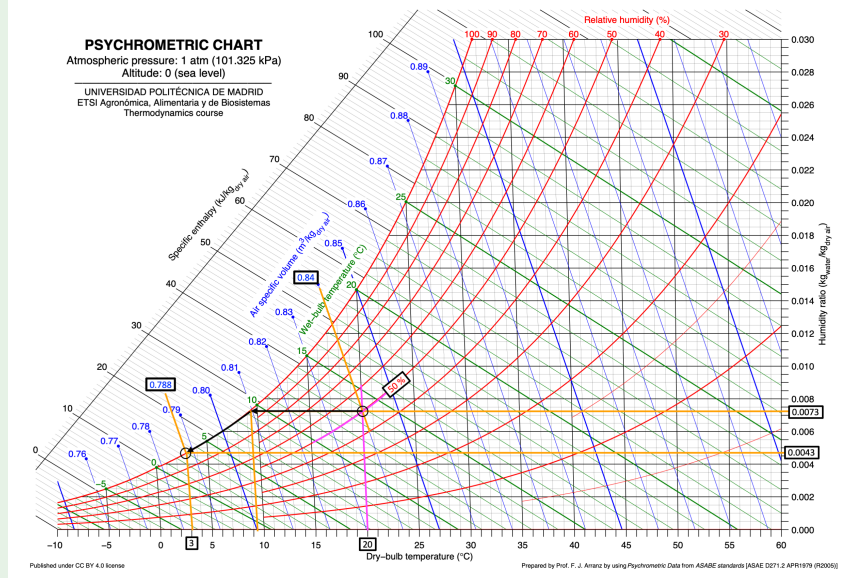
Les masses d'air sec et de vapeur de varient pas puisque la bouteille est fermée, on se déplace donc vers la gauche sur la ligne $w = C^{\text{te}}$ et on tape sur la courbe de saturation à $T_{\text{rosée}} \simeq 9^\circ\text{C}$. A partir de là on condense de l'eau en suivant la courbe de saturation, jusqu'à $\theta = \theta_{\text{sat}} = 3^\circ\text{C}$. En ce point on a $w_2 = 4.3 \text{ g/kg AS}$ et on a donc condensé une masse de d'eau :

$$\begin{aligned} m_{\text{eau}} &= (w_2 - w_1)m_a = (7.3 - 4.3) \text{ g/kg AS} \times 1.2 \times 10^{-3} \text{ kg} \\ &= 3.6 \times 10^{-3} \text{ g} \end{aligned}$$

ce qui est ridiculement faible (correspond à $3.6 \times 10^{-6} \text{ L}$). On peut donc considérer que le volume occupé par le liquide est négligeable et il n'y a que de la vapeur dans la bouteille. En examinant les volumes spécifiques avant et après, on obtient la variation de volume de la bouteille :

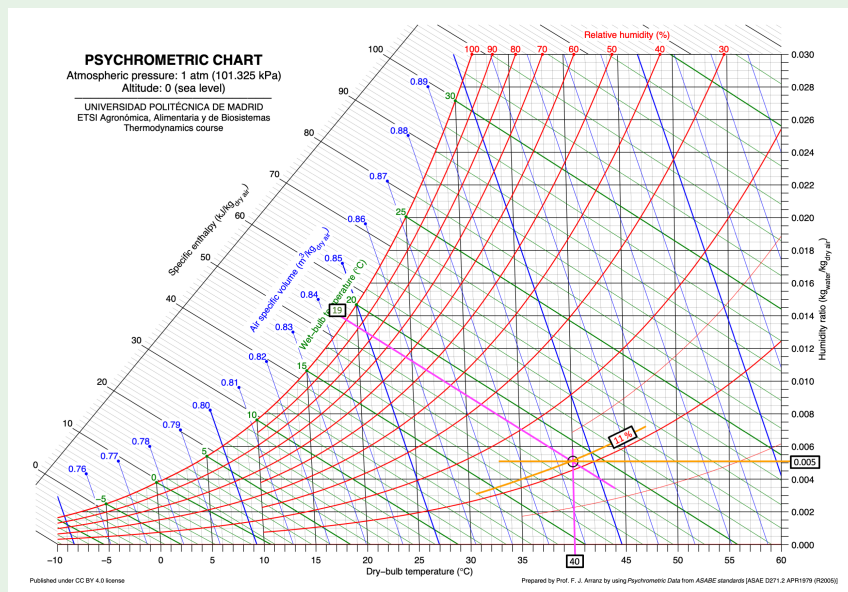
$$\begin{aligned} \Delta V &= m_a(v_2 - v_1) = 1.2 \times 10^{-3} \text{ kg} \times (0.788 - 0.84) \text{ m}^3/\text{kg AS} \\ &= -6.24 \times 10^{-5} \text{ m}^3 = -6.24 \text{ cL} \end{aligned}$$

La bouteille se contracte de 6.24 %.



- b) On souffle un air humide à 40°C à travers un diffuseur au fond d'un aquarium. Cet air remonte sous forme de bulles qui seaturent en vapeur et sont collectées sur une sortie à la surface. Sur cette sortie, on mesure une température de 19°C . Quelle était l'humidité absolue en entrée ? relative ?

L'air humide est saturé en sortie donc à sa température de saturation 19°C . De par le principe de l'expérience, les airs humides à l'entrée et à la sortie ont même température de saturation. On tire une ligne verte à 19°C et on l'intersecte avec la ligne verticale $\theta = 40^{\circ}\text{C}$ et on lit $w = 0.005 \text{ g/kg AS}$ et à peu près $\psi = 11\%$.



Chapitre 5

Transferts avec changement de phase

5.1 Problèmes avec fronts mobiles.

Ce cas est généralement traité pour des transitions liquide/solide. Ils trouvent un regain d'intérêt avec l'utilisation de matériaux à changements de phase (MCP) pour stocker de l'énergie.

Un milieu est initialement dans une phase (par exemple solide) et l'application de conditions frontières engendre un changement de phase (par exemple une liquéfaction). Comme la chaleur met du temps à diffuser dans la nouvelle phase depuis les frontières, on observe un front séparant les deux phases qui progresse à une cer-



taine vitesse dans le milieu (voir exemple de solidification ici). La présence de deux phases et de cette frontière mobile entre les deux complique la formulation du problème et sa résolution.

Plusieurs problèmes dits “de Stefan” peuvent être traités analytiquement en 1D en milieu semi-infini.

5.1.1 Conservation de l'énergie à l'interface

.

Considérons par exemple un tronçon de matière de section A et de longueur ℓ avec une interface entre du liquide à gauche et du solide à droite, dont la position au cours du temps est notée $s(t)$ (Fig. 5.1). On note $\dot{Q}_L$ le flux rentrant à gauche dans le liquide en $x = 0$, $\dot{Q}_S$ le flux sortant du solide à droite.

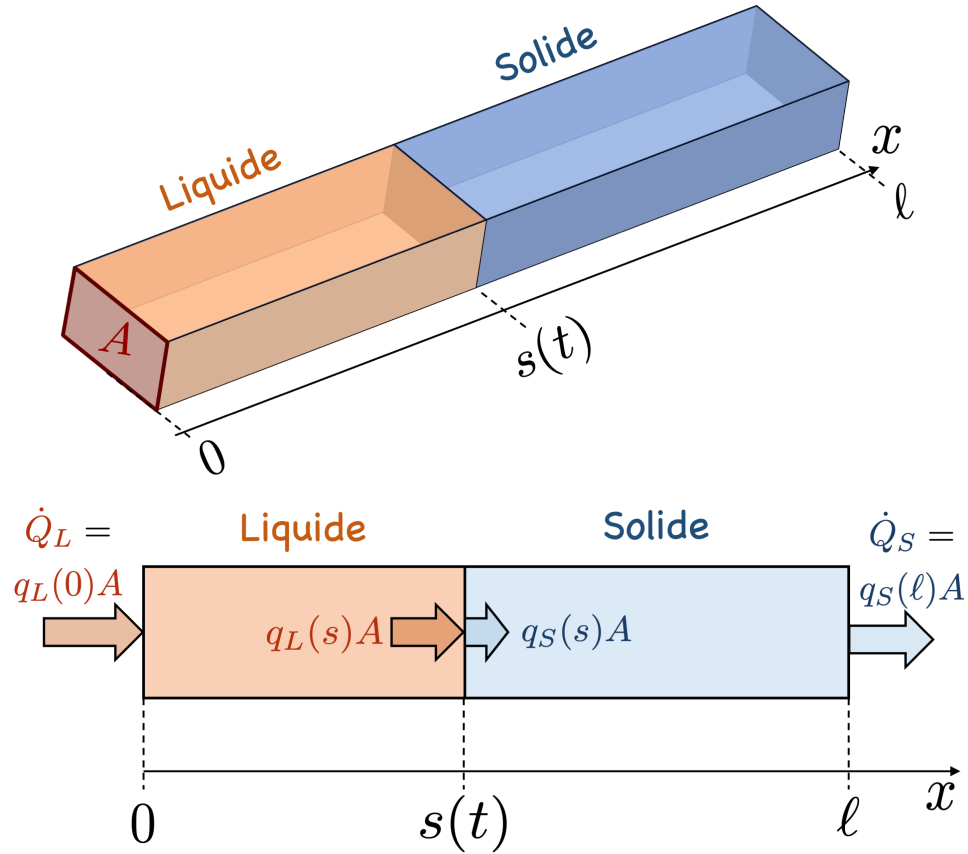


FIGURE 5.1 – Problème général de changement de phase avec front, dans un milieu 1D de section A . Si $\dot{s} > 0$ il y a fusion, si $\dot{s} < 0$ il y a solidification. Les notations q_L et q_S désignent les densités de flux conductif dans le liquide et dans le solide, respectivement.

L'enthalpie de l'ensemble des deux phases s'écrit :

$$H = \int_0^{s(t)} \rho_L h_L A dx + \int_{s(t)}^{\ell} \rho_S h_S A dx$$

où les intégrandes dépendent de x et t (c'est un problème instationnaire).

Quelques hypothèses en plus :

- on néglige la convection (pour le solide normal, pour le liquide c'est plus osé)
- on suppose que les deux phases ont même densité ($\rho_L = \rho_S = \rho$)¹
- on travaille à pression constante

Le premier principe appliqué à l'ensemble donne donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^{s(t)} \rho h_L A dx \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{s(t)}^{\ell} \rho h_S A dx \right) = \dot{Q}_L - \dot{Q}_S$$

Attention, les bornes des intégrales dépendent du temps puisque le front est mobile.

1. On montre que si on relaxe cette hypothèse, on ne peut plus négliger la convection...

Il faut faire attention donc lorsque l'on dérive et utiliser la formule :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_a^{s(t)} f(x, t) dx \right) = \int_a^{s(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f(s(t), t) \dot{s}$$

(avec le signe $-$ pour le troisième terme si c'est la borne inférieure qui dépend du temps). On a donc :

$$\int_0^{s(t)} \rho \frac{\partial h_L}{\partial t} A dx + \int_{s(t)}^{\ell} \rho \frac{\partial h_S}{\partial t} A dx + \rho(h_L - h_S) A \dot{s} = \dot{Q}_L - \dot{Q}_S$$

Le terme en $h_L - h_S$ n'est pas lié à un transfert de chaleur, simplement l'enthalpie totale varie parce que le liquide gagne (ou perd) du terrain sur le solide. On note :

$$L_f = h_L - h_S$$

l'enthalpie de fusion à la température de fusion.

Écrivons maintenant l'équation de la chaleur (1.11) séparément pour le liquide et le solide en 1D :

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial x}$$

où q est la densité de flux. et l'équation précédente devient donc :

$$- \int_0^{s(t)} \frac{\partial q_L}{\partial x} A dx - \int_{s(t)}^{\ell} \frac{\partial q_S}{\partial x} A dx + \rho L_f A \dot{s} = \dot{Q}_L - \dot{Q}_S$$

soit :

$$-q_L(s)A + \underbrace{q_L(0)A}_{\dot{Q}_L} - \underbrace{q_S(\ell)A}_{\dot{Q}_S} + q_S(s)A + \rho A L_f \dot{s} = \dot{Q}_L - \dot{Q}_S$$

et on obtient donc :

$$q_L(s) - q_S(s) = \rho L_f \dot{s} \quad (5.1)$$

Le premier terme est le flux de chaleur sortant du liquide à l'interface, le second est le flux de chaleur rentrant dans le solide à l'interface. Dans des problèmes usuels, q devrait être continu et ces deux flux devraient être égaux (voir problème de contact Sec. 3.2.5). Ici ce n'est pas le cas à cause du changement de phase :

- Si $\dot{s} > 0$, le front avance vers la droite, il y a **liquéfaction**. L'équation ci-dessus indique que $q_S < q_L$. Une partie du flux sortant du liquide ne rentre pas dans le solide. Elle est en fait consommée par le changement d'état.
- Si $\dot{s} < 0$, le front recule vers la gauche, il y a **solidification**. L'équation ci-dessus indique que $q_S > q_L$. Un excès de chaleur rentre dans le solide par rapport à celle qui sort du liquide. Cet excès de chaleur est libéré par la solidification.

Pour finir, il reste à écrire que $\mathbf{q} = -\lambda \partial T / \partial x$ et que la température doit être égale à la température de fusion T_F à l'interface :

Les conditions à écrire à l'interface entre les deux phases sont :

$$\begin{aligned} T_L &= T_S = T_F \\ q_L - q_S &= \left(\lambda_S \frac{\partial T_S}{\partial x} - \lambda_L \frac{\partial T_L}{\partial x} \right) = \rho L_f \dot{s} \end{aligned} \quad \text{pour } x = s(t), \forall t \quad (5.2)$$

Ces équations constituent le fondement des problèmes de changement de phase avec front dits "problème de Stefan".

5.1.2 Problème de Stefan : liquéfaction

Exercice 5.1 :

On considère un morceau de glace semi-infini initialement à la température de fusion T_F . A l'instant $t = 0$ la face en $x = 0$ est portée à une température $T_P > T_F$. On suppose que la phase solide reste toujours à la température T_F .

1. Écrire le problème avec les conditions aux limites et à l'interface.
2. On cherche une solution de la forme :

$$\frac{T_L(x, t) - T_P}{T_F - T_P} = f(\eta) \quad \text{où} \quad \eta = \frac{x}{2\sqrt{a_L t}}$$

Ré-écrivez le problème et montrez que f doit vérifier l'équation différentielle :

$$f''(\eta) + 2\eta f'(\eta) = 0$$

3. En posant $f = g'$, ré-écrire l'équation ci-dessus, puis écrivez la solution de cette dernière. En déduire une expression de f avec deux constantes d'intégration.

Rappel :

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$$

4. Écrivez la condition frontière en $x = 0$ et la continuité de la température à l'interface $x = s(t)$ pour déterminer les deux constantes. Montrez que la seconde condition impose que :

$$\frac{s(t)}{\sqrt{a_L t}} = C^{te} = \sigma.$$

Comment évolue le front de liquéfaction ? Que devient sa vitesse aux temps longs ?

5. En déduire le champ de températures dans le liquide. Tracez-le approximativement.

6. Montrez enfin que la condition de flux à l'interface impose l'équation implicite

$$\sqrt{\pi}\sigma \operatorname{erf} \sigma e^{\sigma^2} = Ste \quad (5.3)$$

où Ste est le nombre de Stefan :

$$Ste = \frac{c_{PL}(T_P - T_F)}{L_f} \quad (5.4)$$

7. (facile) Calculez le flux rentrant par la face $x = 0$.
 8. (Optionnel). Calculez la fonction obtenue avec MATLAB pour différentes valeurs de σ entre 0.1 et 4, et tracez un graphe avec σ en ordonnée et Ste en abscisse (voir Fig. 5.2).

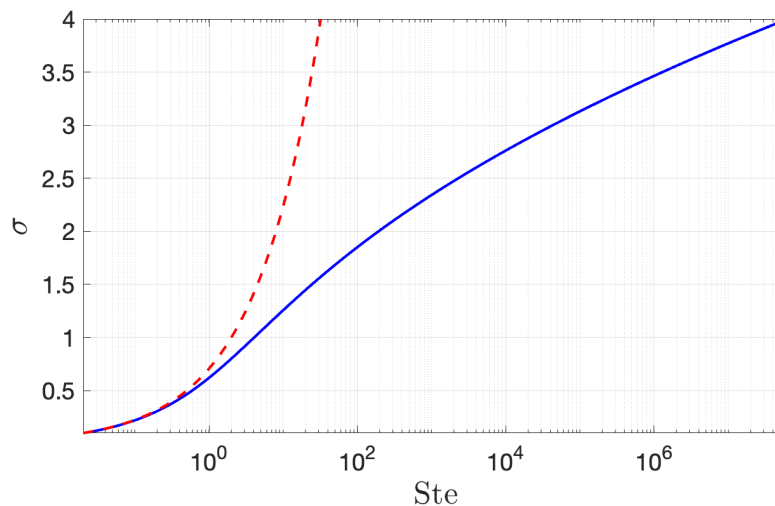


FIGURE 5.2 – Valeur de σ en fonction du nombre de Stefan Ste , calculées par (5.3). La courbe pointillée représente la simplification $\sigma = (Ste/2)^{1/2}$ sous l'hypothèse quasi-stationnaire.

5.1.3 Hypothèse quasi-stationnaire

Il est intéressant de comparer les profils de température (Fig. 5.3) pour différentes valeurs de σ (donc de Ste). On voit que pour une faible valeur de σ les profils de température sont linéaires. Physiquement cela signifie que lorsque le front avance, le profil de température atteint immédiatement son nouveau régime permanent, et ce parce que la diffusion de chaleur dans le liquide est très rapide devant la dynamique du front.

On peut retrouver ce résultat analytiquement en remarquant que le profil de tem-

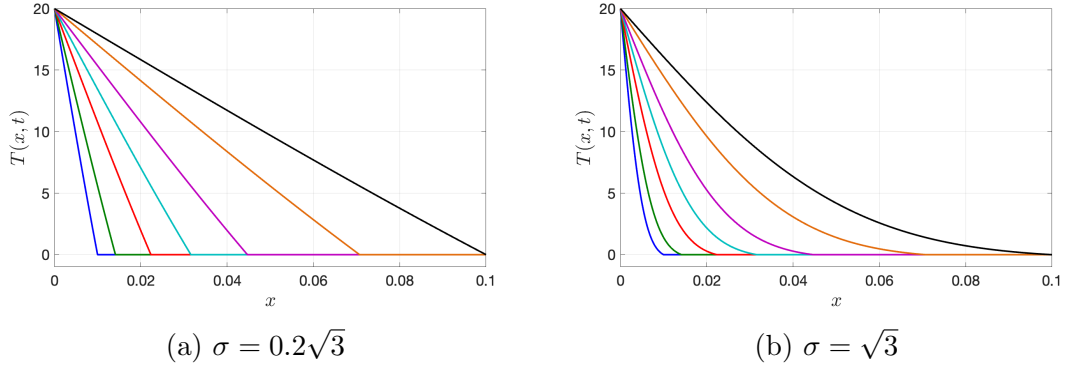


FIGURE 5.3 – Profils de température au cours du temps, pour $t = 0.01 t_D, 0.02 t_D, 0.05 t_D, 0.1 t_D, 0.2 t_D, 0.5 t_D, t_D$, où $t_D = (\ell/\sigma)^2/4a$.

température calculé dans la section précédente s'écrit :

$$\frac{T_L(x, t) - T_P}{T_F - T_P} = \frac{\operatorname{erf}\left(\sigma \frac{x}{s(t)}\right)}{\operatorname{erf} \sigma}$$

C'est la fonction erf qui donne la courbure aux profils. Mais l'argument $\sigma x/s(t)$ est compris entre 0 et σ . Si ce dernier est faible, on peut écrire le développement limité :

$$\operatorname{erf} \sigma = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\sigma - \frac{\sigma^3}{3} + o(\sigma^3) \right)$$

La fonction erf est assimilable au premier terme si :

$$\frac{\sigma^3}{3} \ll \sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma \ll \sqrt{3}$$

Si cela est le cas, le profil de température devient simplement :

$$\frac{T_L(x, t) - T_P}{T_F - T_P} \simeq \frac{x}{s(t)}$$

qui sont bien les profils linéaires observés Fig. 5.3a.

Concrètement, si on considère que $\sigma \ll \sqrt{3}$ dès lors que $\sigma < 0.2\sqrt{3} \simeq 0.35$, le nombre de Stefan correspondant est 0.26. L'approximation quasi-stationnaire sera donc valable pour des nombres de Stefan plus faibles que cette valeur, ce qui est souvent le cas.

Enfin, sous cette approximation, l'équation (5.3) se réduit à :

$$\operatorname{Ste} = \sigma \sqrt{\pi} \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}} (1 + o(1)) \simeq 2\sigma^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma \simeq \sqrt{\frac{\operatorname{Ste}}{2}}$$

approximation représentée par la ligne pointillée Fig. 5.2.

Exercice 5.2 : (important)

Retrouvez le résultat précédent directement en supposant un profil de température linéaire.

L'intérêt de l'exercice ci-dessus est évident. Si l'hypothèse quasi-stationnaire peut être faite, alors le profil de température peut être déduit simplement d'une résolution de l'équation de la chaleur en régime permanent (ou même de la connaissance d'une résistance thermique) et l'équation du front est obtenue directement en écrivant que la densité de flux (constante) compense exactement la puissance $\rho L_f \dot{s}$ consommée par la fusion (ou cédée par la liquéfaction).

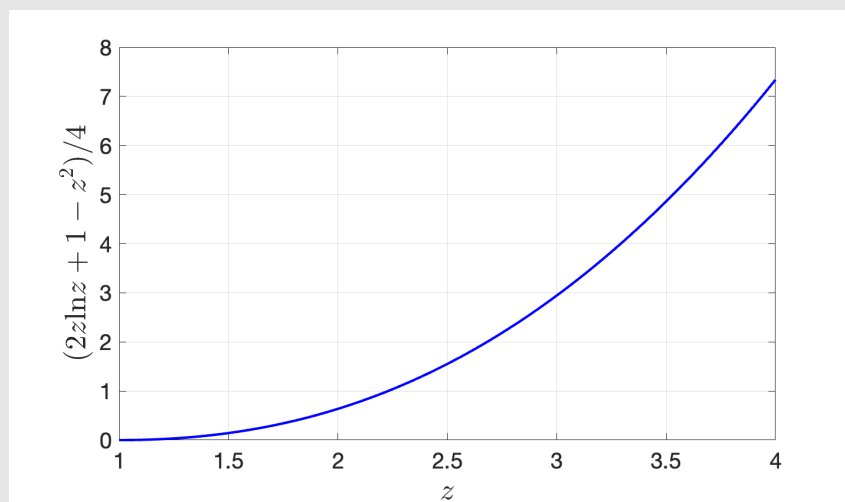
Exercice 5.3 :

Afin de former de la glace, un tube de diamètre extérieur $D = 2$ cm dans lequel circule du glycol à -10°C est immergé dans une cuve d'eau à 0°C .

- Vérifiez que le nombre de Stefan est très petit devant 1.*
- On suppose les résistances convectives internes et conductives dans l'épaisseur du tube négligeables. En faisant l'hypothèse quasi-stationnaire, donnez l'équation régissant la position du front de solidification cylindrique $s(t)$ autour du tube.*

On donne :

$$\int_1^x z \ln z \, dz = \frac{1}{4} (2x^2 \ln x + 1 - x^2)$$



- Combien de temps faut-il pour former une épaisseur de glace égale à 1.5 fois le diamètre du tube (faire un petit dessin...)?*

On donne $\lambda_S = 2.25 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho_S = 917 \text{ kg m}^{-3}$
 d) Quelle est l'énergie stockée par unité de longueur de tube ?

5.2 Transferts avec condensation.

Il y a deux types principaux : la condensation en film, où le liquide ruisselle sur la paroi froide, et la condensation en gouttes, telle que celle que l'on observe sur les vitres de voiture le matin.

La condensation en film est courante en ingénierie, mais moins efficace, parce que le film oppose une résistance thermique au transfert de chaleur.

5.2.1 Condensation en film sur paroi verticale (solution de Nusselt)

On considère une vapeur en contact avec une plaque de hauteur H portée à une température T_P inférieure à la température de rosée de la vapeur. Nusselt a supposé :

- le ruissellement est laminaire,
- la vapeur saturée au contact du liquide,
- que la vapeur n'oppose pas de frottement visqueux sur le liquide,
- et enfin un profil de température linéaire dans le film.

Le coefficient de transfert obtenu est :

$$h = \underbrace{\frac{2\sqrt{2}}{3}}_{0.943} \left(\frac{\lambda_L^3 \rho_L (\rho_L - \rho_V) g L_v}{H \mu_L \Delta T} \right)^{1/4} \quad (5.5)$$

avec :

- λ_L conductivité du liquide,
- ρ_L masse volumique,
- ν_L viscosité cinématique,
- $\Delta T = T_V - T_P$,
- L_v enthalpie de vaporisation.

Remarques :

- On peut souvent négliger ρ_V devant ρ_L (facteur de l'ordre de 1000 en général).
- Pour une condensation sur un cylindre de diamètre D plutôt qu'une plaque, on remplace la largeur b par le périmètre πD .
- Cette formule n'est valable que pour des nombre de Reynolds faibles (voir définition plus loin), pour lesquels le film reste stable.

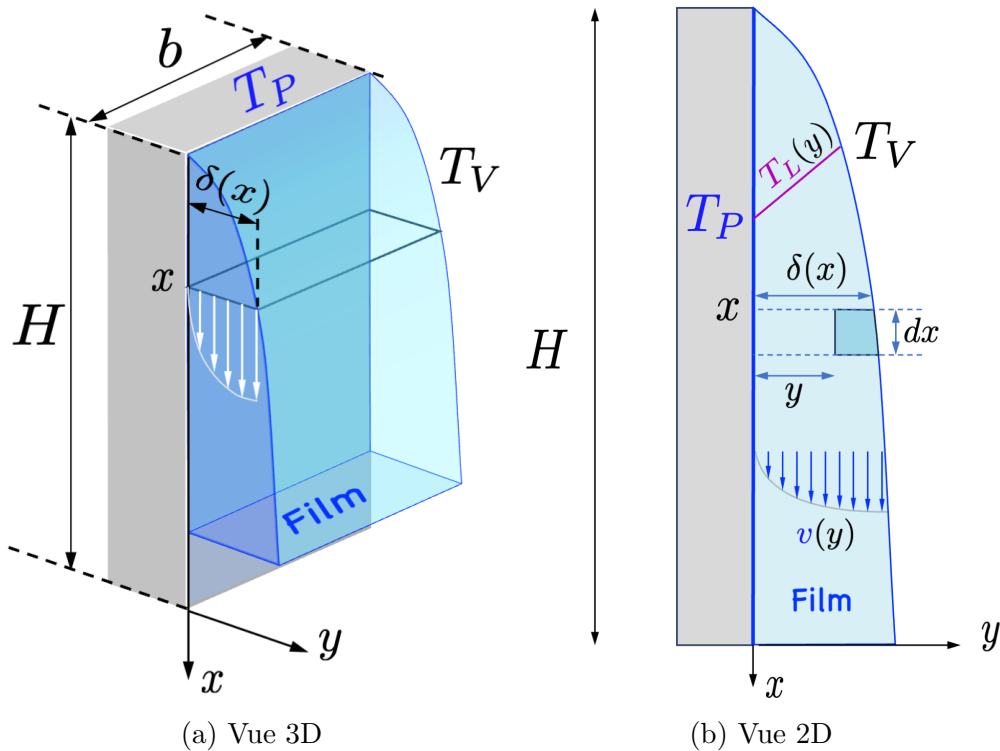


FIGURE 5.4 – Condensation en film

L'exercice suivant fournit la démonstration de ce résultat.

Exercice 5.4 :

1. On considère un élément de volume de film à la profondeur x , de largeur b , de hauteur dx et compris entre y et l'épaisseur du film $\delta(x)$ (Fig. 5.4b).
Écrire les forces exercées sur l'élément (Poids, Archimède et force de frottement) et en déduire le champ de vitesse dans le film.
2. En déduire le débit massique de liquide descendant à la profondeur x .
3. Calculez le débit de vapeur condensée entre x et $x+dx$ en fonction de $d\delta/dx$.
4. Par un bilan thermique, en supposant le profil de température linéaire suivant y dans le film, en déduire l'évolution verticale de l'épaisseur $\delta(x)$.
5. En déduire les coefficients de transferts local h_x et global h_m

La puissance totale échangée avec la paroi s'écrit :

$$\dot{Q} = h_m(T_V - T_P)bH$$

mais c'est aussi la puissance libérée par la condensation de toute la vapeur qui vaut :

$$\dot{Q} = \dot{m}_L L_v$$

où $\dot{m}_L$ est le débit de liquide total, en bas de la plaque. On a donc :

Le débit de liquide par unité de largeur et le coefficient de convection global sont reliés par :

$$\frac{\dot{m}_L}{b} = \frac{h_m(T_V - T_P)H}{L_v} \quad (5.6)$$

Exercice 5.5 : Vérifiez le directement par le calcul sur les résultats de l'exercice précédent.

Il est intéressant de relier un nombre de Nusselt à un nombre de Reynolds, d'une part pour rester cohérent avec les définitions usuelles des coefficients d'échange, maisq aussi pour pouvoir étendre proprement le résultat précédent au-delà du régime laminaire. Pour cela il faut définir un nombre de Reynolds, à partir d'une vitesse caractéristique et d'une longueur caractéristique. Pour la vitesse on prend la vitesse moyenne dans la section du film en bas de la plaque, définie à partir du débit de liquide :

$$v = \frac{\dot{m}_L}{\rho_L b \delta(H)}$$

La longueur caractéristique est le diamètre hydraulique équivalent à la section correspondante, qui vaut :

$$D_h = 4 \frac{\text{Section de passage}}{\text{Longueur mouillée}} = 4 \frac{b\delta(H)}{b} \simeq 4\delta(H)$$

Le nombre de Reynolds est donc défini par :

$$\text{Re} = \frac{\rho_L}{\mu_L} \frac{\dot{m}_L}{\rho_L b \delta(H)} \times 4\delta(H) = 4 \frac{\dot{m}_L}{b \mu_L}$$

soit :

$$\text{Re} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \left[\frac{\rho_L(\rho_L - \rho_V)g\lambda_L^3 H^3 (T_V - T_P)^3}{\mu_L^5 L_v^3} \right]^{1/4} \quad (5.7)$$

En combinant les résultats précédents (on élimine $\lambda_L H (T_V - T_P) / L_v$ entre (5.5) et (5.7)), on obtient :

$$\frac{h_m}{\lambda_L} \underbrace{\left[\frac{\mu_L^2}{\rho_L(\rho_L - \rho_V)g} \right]^{1/3}}_{\mathcal{L}} = \underbrace{\frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{8\sqrt{2}}{3} \right)^{1/3}}_{1.467} \text{Re}^{-1/3} \quad (5.8)$$

La grandeur $\mathcal{L} = [\dots]^{1/3}$ dans le membre de gauche est homogène à une longueur, et le membre de gauche est donc bien un nombre de Nusselt.

La corrélation pour une condensation en film laminaire peut s'écrire :

$$\frac{h_m \mathcal{L}}{\lambda_L} = 1.467 \text{Re}^{-1/3} \quad \text{où} \quad \mathcal{L} = \left[\frac{\mu_L^2}{\rho_L(\rho_L - \rho_V)g} \right]^{1/3} \quad (5.9)$$

Cette corrélation est valable pour $\text{Re} < 30$. La longueur ℓ est de l'ordre de $(\nu_L^2/g)^{1/3}$ donc de l'ordre de 50 μm pour de l'eau.

Au-delà de $\text{Re} < 30$, l'interface se déstabilise et présente des vagues à sa surface. Ce régime, qui annonce l'arrivée de la turbulence s'étend entre $\text{Re} = 30$ et 1600. Au delà, le ruissellement devient turbulent. On peut alors utiliser les corrélations (il en existe d'autres...) :

Régime laminaire à vagues :

$$\frac{h_m \mathcal{L}}{\lambda_L} = \frac{\text{Re}}{1.08 \text{Re}^{1.22} - 5.2} \quad \text{pour} \quad 30 < \text{Re} < 1600$$

Régime turbulent :

$$\frac{h_m \mathcal{L}}{\lambda_L} = \frac{\text{Re}}{8750 + 58 \text{Pr}^{-1/2} (\text{Re}^{0.75} - 253)} \quad \text{pour} \quad \text{Re} > 1600$$

Enfin, tout le raisonnement fait plus haut suppose que la vapeur est saturée (son humidité relative est inférieure à 1, $T_V > T_{\text{rosée}}$). Si ce n'est pas le cas, il faut d'abord la refroidir jusqu'à la température de rosée. On peut utiliser les formules précédentes en remplaçant l'enthalpie de vaporisation L_v par :

$$L'_v = L_v \left(1 + \frac{c_{pV}(T_V - T_{\text{rosée}})}{L_v} \right)^{1/4}$$

5.2.2 Condensation sur un tube horizontal

Une étude approximative, similaire à la plaque verticale, donne :

$$h_m = 0.728 \left(\frac{\lambda_L^3 \rho_L (\rho_L - \rho_V) g L_v}{D \mu_L \Delta T} \right)^{1/4} \quad (5.10)$$

où D est le diamètre du tube. En terme de Nusselt en fonction du Reynolds :

$$\frac{h_m}{\lambda_L} \left[\frac{\mu_L^2}{\rho_L(\rho_L - \rho_V)g} \right]^{1/3} = 1.51 \text{Re}^{-1/3} \quad (5.11)$$

le Reynolds Re étant défini par $\text{Re} = 4\dot{m}_L/\mu_L L$, où L est la longueur du tube.

En général la vapeur est convectée perpendiculairement au tube, ce qui a deux effets. D'abord la vapeur exerce un cisaillement à la surface du film, et de plus l'écoulement décolle de la paroi du cylindre.

Pour un tube horizontal balayé perpendiculairement par un débit de vapeur saturée, on peut utiliser la corrélation :

$$\text{Nu}_m \text{Re}_D^{-1/2} = 0.416 [1 + (1 + 9.47F_D)^{1/2}]^{1/2} \quad (5.12)$$

où

$$\text{Nu}_m = \frac{h_m D}{\lambda_L} \quad \text{Re}_D = \frac{V_\infty D}{\nu_L} \quad F_D = \frac{\mu_L L_v g D}{\lambda_L \Delta T V_\infty^2}$$

Cette corrélation donne un bon accord avec un ensemble d'expérimentations avec plusieurs fluides.

5.2.3 Condensation sur un fagot de tubes

Un premier effet est que l'eau condensée sur les tubes supérieurs ruisselle par gravité vers les tubes inférieurs et les inonde.

La prise en compte de l'effet d'inondation seul conduit à :

$$\frac{h_m}{h_1} = N^{-s} \quad \frac{h_N}{h_1} = N^{1-s} - (N-1)^{1-s} \quad (5.13)$$

où h_1 est le coefficient de transfert global pour un seul tube, h_m celui pour un ensemble de N tubes, et h_N celui sur le $N^{\text{ème}}$ tube. L'exposant s est dépendant de l'arrangement des tubes et de nombreux paramètres. L'analyse de Nusselt suggère $s = 1/4$, mais la valeur $s = 1/6$ prend mieux en compte la turbulence dans le film.

Un second effet, qui se combine avec le premier, est que la vapeur est confinée dans les interstices entre tubes et accélère. Elle exerce donc une force de cisaillement plus importante sur le film.

Les effets combinés d'inondation et de cisaillement par la vapeur conduisent à une expression du coefficient d'échange $N^{\text{ème}}$ tube qui est une correction de la corrélation (5.12) :

$$\left(\frac{h_N D}{\lambda_L} \right) \text{Re}_D^{-1/2} = 0.416 [1 + (1 + 9.47F_d)^{1/2}]^{1/2} [N^{5/6} - (N-1)^{5/6}] \quad (5.14)$$

On trouvera une discussion avancée et de nombreuses autres corrélations dans Rohsenow, Hartnett & Cho (1998).

5.2.4 Condensation en gouttes

Pour des faibles sous-refroidissements de la paroi, le liquide nucléé sous forme de gouttes, qui grossissent, coalescent et finissent par ruisseler au-delà d'une taille critique².

Bien que jusqu'à 10 fois plus efficace pour le transfert de chaleur, la nucléation n'est pas utilisée industriellement, eu égard à sa complexité et son caractère peu reproductible. Elle nécessite de plus un traitement de surface de la paroi froide afin de la rendre hydrophobe. Cela nécessite en général des matériaux peu conducteurs, ce qui ajoute une résistance thermique et limite somme toutes le gain apporté.

5.3 Transferts avec ébullition.



2. On pourra observer ce phénomène sur la paroi inférieure d'un couvercle transparent de casserole. . .

Annexe A

Transformées de Laplace

A.1 Définition

Elle transforme une fonction du temps, $t \in [0, +\infty[$ (et éventuellement des variables spatiales) en une fonction d'une variable notée p (et des mêmes variables spatiales que la fonction originale) :

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (\text{A.1})$$

Notons que c'est une intégrale impropre, qui doit converger. Toutes les fonctions n'ont donc pas forcément une transformée de Laplace. On pourra consulter le polycopié de Monnier (2019) à ce sujet.

Cette transformation est linéaire. On voit par ailleurs que par construction, si t est le temps, p a la dimension T^{-1} .

A.2 Utilité

Son intérêt essentiel est que dériver la fonction originale revient à multiplier par p sa transformée :

$$\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) - f(t=0) \quad (\text{A.2})$$

Les dérivées d'ordres supérieures s'obtiennent par récurrence. Il est conseillé en général d'effectuer un changement de variable (si cela est possible) pour annuler $f(t=0)$.

Inversement, intégrer une fonction du temps revient à diviser sa transformée par p :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t) dt\right) = \frac{F(p)}{p}$$

A.3 Propriétés

On a :

$$\text{Multiplication par } t^n : \quad \mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(p)$$

$$\text{Division par } t : \quad \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^{+\infty} F(u) du$$

et similairement pour les transformations inverses :

$$\text{Multiplication par } p : \quad \mathcal{L}^{-1}[pF(p)] = f'(t) - f(0)\delta(t)$$

$$\text{Division par } p : \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(p)}{p}\right] = \int_0^t f(u) du$$

La transformée de Laplace transforme un produit de convolution en produit, ce qui est souvent utilisé à l'envers :

$$\mathcal{L}^{-1}[F(p)G(p)] = \int_0^t f(s)g(t-s) ds$$

Le fait de pouvoir calculer une transformée inverse constitue une problématique difficile et requiert en toute rigueur des éléments d'analyse complexe. Pour des méthodes pratiques, on trouvera des informations intéressantes et une table de transformées inverses très complète dans le polycopié de Jannot (2011).

Translation et changement d'échelle :

$$\mathcal{L}[e^{-bt}f(t)] = F(p+b) \quad \mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$$

qu'on lit souvent à l'envers sous la forme :

$$\mathcal{L}^{-1}[F(p+b)] = e^{-bt}f(t) \quad \mathcal{L}^{-1}\left[F\left(\frac{p}{a}\right)\right] = af(at)$$

On peut combiner ces deux relations pour inverser $H(p) = F\left(\frac{p+b}{a}\right)$. On pose :

$$G(p) = F\left(\frac{p}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad g(t) = af(at)$$

et donc :

$$\mathcal{L}^{-1}[H(p)] = \mathcal{L}^{-1}\left[F\left(\frac{p+b}{a}\right)\right] = \mathcal{L}^{-1}[G(p+b)] = e^{-bt}g(t) = e^{-bt}af(at)$$

Un dernier résultat très utile est le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} pF(p)$$

Exercice A.1 : montrez que :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p\sqrt{p+b}}\right) = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{erf} \sqrt{bt}$$

A.4 Transformées inverses

Ces tables sont adaptées et corrigées d'après Jannot (2011), dont je félicite et remercie une fois de plus les auteurs.

A.4.1 Transformées inverses classiques

$F(p)$	$f(t)$	$F(p)$	$f(t)$
$\frac{1}{p}$	1	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\sqrt{\frac{1}{\pi t}}$
1	$\delta(t)$ (Dirac)	$\frac{1}{p\sqrt{p}}$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
$\frac{1}{p+b}$	e^{-bt}	$\frac{1}{p(1+k\sqrt{p})}$	$1 - \exp\left(\frac{t}{k^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{t}{\sqrt{k}}\right)$
$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{1}{p\sqrt{p+b}}$	$\frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{erf} \sqrt{bt}$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	$\operatorname{sh} \omega t$
		$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$\operatorname{ch} \omega t$

A.4.2 Transformées inverses utiles pour les problèmes en milieu semi-infini

Elles sont en général difficiles à trouver dans les ouvrages classiques, le matériel ci-dessous est donc précieux...

Les formules dans la colonne de gauche sont écrites en faisant apparaître explicitement la diffusivité thermique a .

Dans la colonne de droite, la variable η est définie par :

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{at}}$$

On pourra noter que d'après l'écriture dans la colonne de gauche, les variables $q = \sqrt{p/a}$ et k sont homogènes à des longueurs.

$F(p)$	$f(t)$
$e^{-x\sqrt{p/a}}$	$\frac{1}{t\sqrt{\pi}} \eta e^{-\eta^2}$
$\frac{e^{-x\sqrt{p/a}}}{\sqrt{p/a}}$	$\sqrt{\frac{a}{\pi t}} e^{-\eta^2}$
$\frac{e^{-x\sqrt{p/a}}}{p}$	$\operatorname{erfc} \eta$
$\frac{p}{e^{-x\sqrt{p/a}}}$	$2\sqrt{at} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} - \eta \operatorname{erfc} \eta \right]$
$\frac{p\sqrt{p/a}}{e^{-x\sqrt{p/a}}}$	$t \left[(1 + \eta^2) \operatorname{erfc} \eta - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \eta e^{-\eta^2} \right]$
$\frac{p^2}{e^{-x\sqrt{p/a}}}$	$\frac{1}{k} \sqrt{\frac{a}{\pi t}} e^{-\eta^2} - \frac{a}{k^2} \exp\left(\frac{x}{k} + \frac{at}{k^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\eta + \frac{\sqrt{at}}{k}\right)$
$\frac{1 + k\sqrt{p/a}}{e^{-x\sqrt{p/a}}}$	$\frac{a}{k} \exp\left(\frac{x}{k} + \frac{at}{k^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\eta + \frac{\sqrt{at}}{k}\right)$
$\frac{\sqrt{p/a} (1 + k\sqrt{p/a})}{e^{-x\sqrt{p/a}}}$	$\operatorname{erfc} \eta - \exp\left(\frac{x}{k} + \frac{at}{k^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\eta + \frac{\sqrt{at}}{k}\right)$
$\frac{p (1 + k\sqrt{p/a})}{e^{-x\sqrt{p/a}}}$	$2\sqrt{\frac{a}{\pi t}} e^{-\eta^2} - (x + k) \operatorname{erfc} \eta + k \exp\left(\frac{x}{k} + \frac{at}{k^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\eta + \frac{\sqrt{at}}{k}\right)$
$\frac{p\sqrt{p/a} (1 + k\sqrt{p/a})}{e^{-x\sqrt{p/a}}}$	$-\frac{2}{k^3} \left(\frac{at}{\pi}\right)^3 e^{-\eta^2} - \frac{a}{k^2} \left(1 + \frac{x}{k} + \frac{2at}{k^2}\right) \exp\left(\frac{x}{k} + \frac{at}{k^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\eta + \frac{\sqrt{at}}{k}\right)$
$\frac{e^{-x\sqrt{p/a}}}{(1 + k\sqrt{p/a})^2}$	

Annexe B

Fonctions erreur

La fonction erreur est donnée par :

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

Son graphe est représenté Fig. B.1

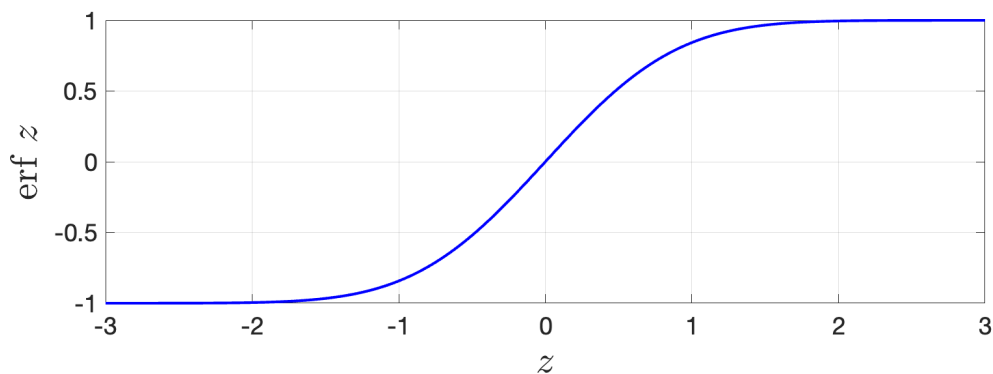


FIGURE B.1 – Fonction erf

Elle est clairement impaire et vérifie :

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \operatorname{erf} z = -1 \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \operatorname{erf} z = 1$$

Sa pente en 0 est aussi clairement $2/\sqrt{\pi} \simeq 1.13$.

Son emploi est récurrent en transferts et dans d'autres disciplines de la physique, et elle doit être considérée comme une fonction « classique », au même titre que les fonctions trigonométriques ou hyperboliques.

La fonction erf a une interprétation statistique : c'est l'intégrale d'une gaussienne. On montre aisément que la probabilité pour qu'une variable aléatoire normale centrée

de variance σ^2 soit comprise entre $-x$ et x est :

$$\mathbb{P}(-x \leq X \leq x) = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

On définit également la fonction erreur complémentaire erfc par :

$$\operatorname{erfc} z = 1 - \operatorname{erf} z$$

qui varie donc entre 2 et 0. Son emploi en transferts est généralement limité sur l'intervalle $[0, +\infty]$.

On peut remarquer que la fonction vérifie l'équation différentielle :

$$f''(x) + 2xf'(x) = 0$$

et elle apparaît donc naturellement dans la résolution de l'équation de la chaleur dans un mur semi-infini sans passer par les transformées de Laplace (voir poly de TD).

z	$\operatorname{erf} z$	$\operatorname{erfc} z$	z	$\operatorname{erf} z$	$\operatorname{erfc} z$
0	0	1	1.35	0.9438	0.05624
0.05	0.05637	0.9436	1.4	0.9523	0.04771
0.1	0.1125	0.8875	1.45	0.9597	0.0403
0.15	0.168	0.832	1.5	0.9661	0.03389
0.2	0.2227	0.7773	1.55	0.9716	0.02838
0.25	0.2763	0.7237	1.6	0.9763	0.02365
0.3	0.3286	0.6714	1.65	0.9804	0.01962
0.35	0.3794	0.6206	1.7	0.9838	0.01621
0.4	0.4284	0.5716	1.75	0.9867	0.01333
0.45	0.4755	0.5245	1.8	0.9891	0.01091
0.5	0.5205	0.4795	1.85	0.9911	0.008889
0.55	0.5633	0.4367	1.9	0.9928	0.00721
0.6	0.6039	0.3961	1.95	0.9942	0.005821
0.65	0.642	0.358	2	0.9953	0.004678
0.7	0.6778	0.3222	2.05	0.9963	0.003742
0.75	0.7112	0.2888	2.1	0.997	0.002979
0.8	0.7421	0.2579	2.15	0.9976	0.002361
0.85	0.7707	0.2293	2.2	0.9981	0.001863
0.9	0.7969	0.2031	2.25	0.9985	0.001463
0.95	0.8209	0.1791	2.3	0.9989	0.001143
1	0.8427	0.1573	2.35	0.9991	0.0008893
1.05	0.8624	0.1376	2.4	0.9993	0.0006885
1.1	0.8802	0.1198	2.45	0.9995	0.0005306
1.15	0.8961	0.1039	2.5	0.9996	0.000407
1.2	0.9103	0.08969	2.55	0.9997	0.0003107
1.25	0.9229	0.0771	2.6	0.9998	0.000236
1.3	0.934	0.06599	2.65	0.9998	0.0001785

Bibliographie

- BIRD, R. B., W. E. STEWART & E. N. LIGHTFOOT (1960). *Transport phenomena*. John Wiley et sons.
- BOBROFF, J. (2009). *Thermodynamique Classique, option M1 magistère de Physique Fondamentale*. Université Paris Sud. URL : http://hebergement.u-psud.fr/rmn/thermo/thermo_pdf/coursThermo2013.pdf.
- BRUNET, É., J. BEUGNON & É. WANDERSMAN (2015). *Cours de Physique Statistique*. Sorbonne Université, École Normale Supérieure. URL : <http://www.phys.ens.fr/~ebrunet/PhyStat.pdf>.
- IZARD, J.-L. & J. LELONG (juill. 2006). *Matériaux et inertie*. Rapp. tech. EnviroBAT-Méditerranée. URL : https://www.ekopolis.fr/sites/default/files/2019-11/0908_Materiaux_et_inertie_Lelong_Izard_V2%20%281%29.pdf.
- JANNOT, Y. (2011). *Transferts thermiques*. Mines de Nancy. URL : <http://www.thermique55.com/principal/thermique.pdf>.
- LEVICKY, R. (2023). *Course CBE-UY 6333 (Graduate Transport)*. New-York : NYU, Tandon School of Engineering. URL : <https://research.engineering.nyu.edu/~rlevicky/CBE6333.htm>.
- LOUISNARD, O. (2021). *Cours de mécanique des fluides*. IMT Mines-Albi. URL : <https://perso.imt-mines-albi.fr/~louisnar/ENSEIGNEMENT/MECADEF/PolyMecaDef.pdf>.
- MONNIER, J. (2019). *Transformée de Laplace*. INSA, Toulouse. URL : https://moodle.luniversitenumerique.fr/pluginfile.php/668/mod_resource/content/11/Laplace.pdf.
- ROHSENOW, W. M., J. P. HARTNETT & Y. I. CHO, éd. (1998). *Handbook of heat transfer*. T. 3. Mcgraw-hill.