

Rappel de quelques formules de différences finies.

On rappelle ici les formules de différences finies les plus courantes pour des fonctions de 1 ou 2 variables. Des formules d'ordre supérieur peuvent être établies, mais elles sont rarement utilisées. Les formules pour des fonctions de 3 variables ou plus pourront être écrites à titre d'exercice.

1 Fonction d'une variable $u(x)$

On pose $u_i = u(x_i)$

1.1 Dérivée première

1.1.1 Progressive

$$u'(x_i) = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}$$

1.1.2 Régressive

$$u'(x_i) = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}$$

1.1.3 Régressive

$$u'(x_i) = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}$$

1.2 Dérivée seconde

$$u''(x_i) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}$$

2 Fonction de 2 variables $u(x, y)$

Attention : les variables s'appellent parfois x et $t \dots$

On pose $u_{ij} = u(x_i, y_j)$.

Pour retrouver facilement les expressions ci-dessous, penser qu'une dérivée partielle par rapport à x signifie "faire comme si la fonction était seulement une fonction de la variable x , à y constant".

2.1 Dérivées première

2.1.1 Progressives

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta x} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\Delta y}\end{aligned}$$

2.1.2 Régressives

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y}\end{aligned}$$

2.1.3 Centrées

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y}\end{aligned}$$

2.2 Dérivées secondes

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1}}{4\Delta x \Delta y}\end{aligned}$$