Travaux dirigés
Equations aux Dérivées Partielles (EDP)

Olivier LOUISNARD *

29 novembre 2012

*Certains des exercices de ce polycopiés ont été initialement proposés par François BOUCHER et Mathieu FRUCTUS, professeurs de classe préparatoire et anciens vacataires à l'Ecole de Mines d'Albi.

1 Terminologie- Classification

Exercice 1.1 : Diagnostics généraux sur une EDP

Dans tout cet exercice, λ, a, c, k, μ sont des constantes et f une fonction fixée des variables d'espace.

Déterminer, pour chaque EDP :

- si elle est linéaire,
- si est-elle homogène,
- l'opérateur linéaire associé,
- les variables dépendantes,
- s'il s'agit d'une équation d'évolution,
- son ordre.

1. Equation de la chaleur : $u_t = a\nabla^2 u$.
2. Equation de Poisson : $\nabla^2 u = f$.
3. Equation de Laplace : $\nabla^2 u = 0$.
4. Equation des ondes : $u_{tt} = c^2\nabla^2 u$.
5. Equation de Helmholtz : $\nabla^2 u + k^2 u = 0$.
6. Equation de vibration de plaque mince : $u_{tt}+a\nabla^4 u = 0$
7. Equation de Korteweg-de Vries : $u_t - v_0 u_x = auu_x - bu_{xxx}$.
8. Equation d'Airy : $u_t = -u_{xxx}$.
9. Equation de Burger (non dissipative) : $u_t + uu_x = 0$.
10. Equation de Burger (dissipative) : $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$.
11. Equation des ondes sphériques : $u_{tt} = c^2(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r)$.
12. Equation de Cahn-Hilliard : $C_t = D\nabla^2\left(C^3 - C - \gamma\nabla^2 C\right)$.
13. Equation de Black-Scholes : $V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0$.

Exercice 1.2 : Ecriture développée d'une EDP.

Déterminer l'écriture usuelle des EDP suivantes en dimension 2. Vous en profiterez pour déterminer si les EDP sont linéaires, homogènes, et s'il s'agit d'un problème d'évolution ou d'un état stationnaire.

1. Equation de Laplace
$$\nabla^2 u = 0$$
2. Equation de diffusion
$$u_t = \operatorname{div}\Big(D(u)\,\mathbf{grad}\,u\Big)$$

3. Equation de membrane non chargée

$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{grad}\, u}{\sqrt{1+||\,\mathbf{grad}\, u||^2}}\right)=0$$

4. Equation de vibration de plaque mince

$$u_{tt}=a\nabla^4 u$$

(où l'opérateur ∇^4 représente le Laplacien appliqué deux fois).

5. Equation de Helmholtz

$$\nabla^2 u+k^2 u=0$$

6. Equation de convection-diffusion

$$C_t+\operatorname{div}\left(C\mathbf{v}-D\,\mathbf{grad}\, C\right)=0$$

L'inconnue est la concentration $C(x,y,t)$, et $\mathbf{v}=(u(x,y,t),v(x,y,t))$ est le vecteur vitesse, supposé connu. On supposera D constante. La parenthèse pourra être coupée en deux.

7. Equation de diffusion-migration d'une espèce chargée

$$C_t+\operatorname{div}\left(-D\,\mathbf{grad}\, C+\alpha C\,\mathbf{grad}\, V\right)=0$$

L'inconnue est la concentration $C(x,y,t)$, D et α sont des constantes et $V(x,y)$ est le potentiel électrique, fonction scalaire connue. La parenthèse pourra être coupée en deux.

8. Equations de Navier-Stokes (écoulements de fluide incompressible) :

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}\mathbf{v}=0\\&\rho(\mathbf{v}_t+(\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{v})=-\,\mathbf{grad}\, p+\mu\nabla^2\mathbf{v}\end{aligned}$$

où ρ et μ sont des constantes, $\mathbf{v}=(u(x,y,t),v(x,y,t))$ le vecteur vitesse, $p(x,y,t)$ la pression, et l'opérateur de dérivation $(\mathbf{v}.\nabla)$ est obtenu en faisant formellement le produit scalaire de $\mathbf{v}=(u,v)$ par $\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y})$

Exercice 1.3 : Conditions initiales et frontières

Dans chacun des problèmes d'EDP suivants, déterminer s'il s'agit de conditions initiales ou de conditions frontières, et dans ce dernier cas donner son type (Dirichlet, Neumann ou Robin) et son homogénéité :

1.

$$\begin{aligned}&u_{xx}+u_{yy}=0 &&\text{sur } \Omega\\&u=g &&\text{sur } \partial\Omega\end{aligned}$$

2.
$$\begin{array}{ll} u_{tt}=c^2u_{xx} & \text{sur }]0,+\infty[\times]0,+\infty[\\ u_x(0,t)=0 & \forall t\geq 0 \\ u(x,0)=f(x) & \forall x\geq 0 \\ u_t(x,0)=g(x) & \forall x\geq 0 \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{ll} u_t=Du_{xx} & \text{sur }]0,L[\times]0,+\infty[\\ u_x(0,t)=u_0\sin(\omega t) & \forall t\geq 0 \\ u_x(L,t)+hu(L,t)=0 & \forall t\geq 0 \\ u(x,0)=f(x) & \forall x\geq 0 \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{ll} u_{tt}=c^2\nabla^2u & \text{sur }]-a,a[\times]-b,b[\times]0,+\infty[\\ u_x(-a,y,t)=0 & \forall y\in]-b,b[,\forall t\geq 0 \\ u(a,y,t)=u_0\sin(\omega t) & \forall y\in]-b,b[,\forall t\geq 0 \\ u(x,-b,t)=0 & \forall x\in]-a,a[,\forall t\geq 0 \\ u_y(x,b,t)=ku(x,b,t) & \forall x\in]-a,a[,\forall t\geq 0 \\ u(x,y,0)=f(x,y) & \forall x\in]-a,a[,\forall y\in]-b,b[\\ u_t(x,y,0)=g(x,y) & \forall x\in]-a,a[,\forall y\in]-b,b[\end{array}$$

5.
$$\begin{array}{ll} u_t=D\nabla^2u & \text{sur }]-a,a[\times]-b,b[\times]0,+\infty[\\ u(-a,y,t)=u_0 & \forall y\in]-b,b[,\forall t\geq 0 \\ u_x(a,y,t)=0 & \forall y\in]-b,b[,\forall t\geq 0 \\ u_y(x,-b,t)-h(u(x,-b,t)-u_0)=0 & \forall x\in]-a,a[,\forall t\geq 0 \\ u_y(x,b,t)=0 & \forall x\in]-a,a[,\forall t\geq 0 \\ u(x,y,0)=f(x,y) & \forall x\in]-a,a[,\forall y\in]-b,b[\end{array}$$

6.
$$\begin{array}{ll} u_t=D\nabla^2u & \text{sur } [0,R[\times[0,2\pi[\times]0,+\infty[\\ u(R,\theta,t)=u_0 & \forall\theta\in[0,\pi[,\forall t\geq 0 \\ u_r(R,\theta,t)=0 & \forall\theta\in[\pi,2\pi[,\forall t\geq 0 \\ u(r,\theta,0)=f(r,\theta) & \forall r\in[0,R[,\forall\theta\in[0,2\pi[\end{array}$$

Exercice 1.4 : Solutions d'une équation de propagation.

On considère sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ l'EDP $u_{tt}=4u_{xx}$

1. Vérifier que $\sin(3x)\cos(6t)$ et $\sin(3x-6t)$ sont solutions.
2. Tracer ces deux fonctions en fonction de x pour différentes valeurs de t. Comment appelle-t-on les ondes correspondantes ?
3. Quelle condition mathématique manque-t-il pour que l'EDP admette seulement l'une ou l'autre de ces solutions ? Quel est le sens physique de cette condition supplémentaire ?
4. On reprend la question 1 avec l'équation $u_{tt}=c^2u_{xx}$. Sous quelle condition sur ω, c et k les fonctions $\sin(kx)\cos(\omega t)$ et $\sin(kx-\omega t)$ sont-elles solutions ?

5. Si, sur $\mathbb{R}^3$ on considère la généralisation de l'équation précédente pour deux variables d'espace x et y, $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$. En s'inspirant de la question précédente, déterminer plusieurs solutions $u(x, y, t)$ de ce problème.

Exercice 1.5 : Notion de stabilité et de problème mal-posé

Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}$ et $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ tel que :

$$\begin{aligned} &\nabla^2 u = 0 \\ &u(0, y) = f, \qquad \text{où } f(y) = \frac{\sin(ny)}{n} \\ &u_x(0, y) = 0 \end{aligned}$$

Chercher les solutions de ce problème sous la forme $u(x, y) = X(x)Y(y)$ et en déduire l'instabilité du système.

Exercice 1.6 : Solutions d'une équation de propagation (bis).

On considère l'équation de propagation $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$.

1. (a) Montrez que la fonction $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ est solution.
   (b) Existe-t-il un point où $f(x - ct)$ est toujours nulle ?
   (c) On suppose que $u(t = 0, x) = F(x)$. Tracez $f(x - ct)$.
2. On cherche maintenant s'il existe une solution de la forme $u(x, t) = X(x)T(t)$.
   (a) Montrez que si c'est le cas X et T doivent satisfaire des EDOs du second ordre, où apparaît une constante indéterminée.
   (b) Montrez que le signe de cette constante est fixé si la solution doit rester finie dans le temps.
   (c) Résoudre les EDO, exprimer la solution $u(x, t)$, et montrez qu'elle est nulle en certains points de l'espace à tout temps t. Tracez la solution.

Exercice 1.7 : Solutions d'une équation de diffusion. Fonction erreur.

On considère l'équation de diffusion $u_t = a u_{xx}$. On en cherche une solution sous la forme $u(x, t) = F\left(\frac{x}{\sqrt{at}}\right)$

1. La solution proposée est-elle justifiée par l'analyse dimensionnelle ?
2. Montrer que F doit vérifier une équation différentielle du second ordre que l'on écrira.
3. Résoudre l'équation et trouver F sous forme intégrale.

4. On définit la fonction erreur par :

$$\operatorname{erf} X = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^X e^{-u^2} \, du$$

   Exprimez la solution trouvée à l'aide de cette fonction, et tracez-la (le graphe de la fonction erreur peut être intuité).

2 Modélisation

Exercice 2.1 : Equation de corde vibrante

On considère une corde sur laquelle on fait les hypothèses suivantes :

i) le diamètre et la densité de la corde sont homogènes,
ii) seules les forces de tension s'appliquent,
iii) la corde est parfaitement élastique et ne résiste pas au mouvement. On néglige les frottements de l'air,
iv) la vibration est parfaitement verticale.

On notera ρ la densité linéique de la corde et $u(x,t)$ la position de la corde au point x et au temps t. Pour trouver l'équation du mouvement, on raisonnera sur un tronçon de corde compris entre les abscisses a et b.

1. Exprimer les tensions exercées aux points a et b au moyen d'un scalaire $T(x,t)$ et du vecteur tangent à la corde $\mathbf{t}$, et la quantité de mouvement du tronçon de corde comme une intégrale sur $[a,b]$.
2. Appliquer le PFD au tronçon $[a,b]$ et transformer cette équation en une égalité de deux intégrales sur $[a,b]$.
3. En déduire une EDP vectorielle, et projeter cette équation sur les axes horizontal et vertical.
4. Identifier la tension de la corde au repos T_0 dans la première équation et l'introduire dans la seconde. Quel est le type de l'équation obtenue ? A quoi est homogène le rapport T_0/ρ ?
5. Si l'on considère cette corde comme modélisant une corde d'instrument de musique, des conditions initiales de type
$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ u_t(x,0) &= 0 \end{aligned}$$
ou
$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0 \\ u_t(x,0) &= g(x) \end{aligned}$$
correspondent à des instruments différents. Pourriez-vous imaginer lesquels ?
6. Comment s'écriraient la condition frontière en $x=0$ pour :
   (a) une extrémité de corde maintenue au repos,
   (b) une extrémité de corde accrochée à un chariot se déplaçant librement et sans frottement le long d'une glissière verticale.
   (c) une extrémité de corde vibrée verticalement à une fréquence ω.
7. Généraliser la démarche précédente pour obtenir l'équation des ondes en dimension 2 sur une membrane.
8. En dimension 1, écrire l'EDP satisfaite par u dans les cas suivants :
   (a) On tient compte de la pesanteur

(b) On tient compte de la résistance de l'air
(c) Il y a une force de rappel élastique
(d) On accroche au point x_0 une masse m_0
(e) La corde est soumise à une onde acoustique de fréquence ω

Exercice 2.2 : Equations de transport de la matière

On considère un mélange de deux espèces A (sirop de grenadine) et B (eau) miscibles (c'est-à-dire que les espèces se mélangent parfaitement et ne forment pas de gouttes par exemple). On cherche une EDP dont la solution donne la concentration $C(x, y, z, t)$ de l'espèce A en tout point de l'espace et à tout instant t. Cette EDP doit rendre compte de trois phénomènes :

i) La diffusion : l'espèce A diffuse depuis les régions où elle est très concentrée vers celles ou elle l'est faiblement.
ii) La convection : l'espèce A est emportée par le mouvement global du mélange (engendré par la rotation d'un cuillère, un shaker ...).
iii) La réaction : les espèces A et B réagissent chimiquement selon la réaction A $\longrightarrow$ B (ce n'est pas le cas pour l'eau et la grenadine)

On considère un volume V rempli de mélange, limité par une surface S dont on note $\mathbf{n}$ le vecteur normal sortant en chaque point.

1. Ecrire l'expression du nombre de moles de A compris dans le volume V.
2. Le transport de A est quantifié par le nombre de moles de A traversant perpendiculairement une unité de surface par unité de temps (densité de flux). Ecrire la dimension de cette grandeur vectorielle notée $\mathbf{J}$.
3. Exprimer la quantité de A qui rentre dans dans le volume V par unité de temps à travers la frontière S en faisant intervenir $\mathbf{J}$.
4. On note R_A le nombre de moles de A produites par réaction chimique par unité de temps et par unité de volume. Exprimer la quantité de A produite par unité de temps dans tout le volume V.
5. Déduire des deux questions précédentes la variation temporelle du nombre de moles de A dans V. En utilisant la formule de la divergence, en déduire une EDP reliant C, $\mathbf{J}$ et R_A.
6. Traduire mathématiquement la diffusion (loi de Fick) par une relation entre la densité de flux diffusif $\mathbf{J_D}$ et les dérivées partielles de C (on pourra raisonner en 1D pour commencer). Comment s'appelle le coefficient multiplicatif D et quelle est sa dimension ?
7. Ecrire mathématiquement le flux convectif $\mathbf{J_C}$, en notant $\mathbf{v}$ le champ de vitesses du fluide (on pourra encore raisonner en 1D, et/ou utiliser l'analyse dimensionnelle).
8. En regroupant tous les résultats, et en supposant que la vitesse de réaction peut s'exprimer en fonction de C sous la forme $R_A = R_A(C)$, écrire l'EDP régissant

les variations de C. Ecrire cette équation en 1D. Sous quelle condition est-elle linéaire ?

9. On suppose que le problème a une dimension caractéristique L (la largeur d'un tuyau par exemple) et une vitesse constante V_0 (la vitesse du fluide supposée uniforme sur la section d'entrée du tuyau). On supposera $R_A(C) = 0$ et D constante.
   (a) Adimensionnaliser l'équation obtenue par $X = x/L$, $T = V_0 t/L$ et faire apparaître le nombre de Péclet $\mathrm{Pe} = V_0 L/D$ dans la nouvelle équation. Que mesure ce nombre ? Comment s'appelle l'équation obtenue si $\mathrm{Pe} \to +\infty$?
   (b) Faire un autre choix pour adimensionnaliser le temps, et écrire l'équation adimensionnelle correspondante. Quelle est l'équation obtenue en faisant $\mathrm{Pe} \to 0$? Dans les deux cas réécrivez les équations dans les variables originales.
10. On considère un tube dans lequel s'écoule du B pur (eau) et on introduit une petite quantité de A (grenadine) au milieu (le problème n'est plus 1D). Décrire qualitativement le champ de concentration aux limites $\mathrm{Pe} \to 0$ et $\mathrm{Pe} \to +\infty$.
11. Dans le cas général, que représentent physiquement les conditions aux frontières suivantes ?
   (a) $C = C_0$
   (b) $\mathbf{J}.\mathbf{n} = 0$
   (c) $-D\,\mathbf{grad}\,C.\mathbf{n} = 0$

Exercice 2.3 : Evolution d'une population de fourmis

Les fourmis sont individuellement très primaires et dépourvus d'"intelligence" ou d'"instinct". Par un comportement collectif, elles parviennent toutefois à former des structures étonnantes. Certaines termites constituent notamment des nids en forme de cathédrales, avec des piliers périodiquement répartis. D'autres espèces constituent des rangs de combattants très ordonnés, comparables aux armées humaines, au sein desquelles des émissaires font des aller-retours en permanence .... Cette aptitude provient d'un système de communication par phéromones, espèces chimiques qu'elles déposent et auxquelles elles sont sensibles. Un modèle par des EDP est basé sur les hypothèses suivantes :

1. Chaque fourmi prend une quantité de terre donnée qu'elle imprègne systématiquement d'une quantité de phéromones donnée et la dépose au bout d'un temps moyen fixé. Une telle fourmi est dite"active" et une fois qu'elle a déposé sa terre, elle devient inactive.
2. Les phéromones de la terre déposée s'évaporent avec une cinétique d'ordre 1.
3. Les phéromones en phase vapeur diffusent avec un certain coefficient de diffusion et se dégradent avec une cinétique du premier ordre.

4. Le nombre de fourmis actives est petit vis-à-vis du nombre total d'individus, et la quantité de terre est supposée illimitée, de telle sorte qu'un nombre constant de fourmis deviennent actives à chaque instant et en tout point.
5. les fourmis ont un mouvement brownien et en l'absence de tout autre phénomène, leur concentration suivrait une loi de diffusion (elle sont "curieuses" et s'étalent dans l'espace),
6. Enfin, et c'est le point principal, les fourmis sont sensibles aux phéromones vaporisées et se dirigent, en plus du mouvement brownien, avec une vitesse proportionnelle au gradient de concentration de ces phéromones (comme si elles en cherchaient la source). Ce phénomène est appelé "chimiotaxie" et est la clé des comportements collectifs dans les colonies animales.

En prenant pour variables dépendantes, la concentration en fourmis actives $C(x, y, t)$, la concentration en phéromones au sol $P(x, y, t)$ et la concentration en phéromones évaporées $H(x, y, t)$, écrire ce modèle en choisissant autant de constantes qu'il est nécessaire.

On montre que ce modèle admet des solutions périodiques dans l'espace, suggérant que les fourmis se regroupent en "plots" ordonnées, mais cette analyse dépasse le cadre de ce cours.

Exercice 2.4 : Modélisation d'une épizootie

On cherche à prédire comment une épizootie (i.e. épidémie pour les animaux, par exemple la rage) peut se propager sur un territoire donné, pour certaines conditions initiales. Pour cela, on divise la population en 3 parties (modèle SIR) :

- Les individus sains, potentiellement infectables. On note $S(t)$ leur nombre.
- Les individus infectés, supposés tous contagieux. On note $I(t)$ leur nombre.
- Les individus non-infectables et non contagieux, soit parce qu'ils ont guéri et sont immunes, soit parce qu'on les a isolés, soit parce qu'ils sont morts dans le cas des maladies létales. On note $R(t)$ leur nombre.

L'évolution de l'épidémie se fait donc suivant le processus :

$$S \longrightarrow I \longrightarrow R$$

On fait ensuite les hypothèses suivantes :
- Le nombre d'individus nouvellement infectés par unité de temps est proportionnel à la fréquence de rencontre entre les individus sains et ceux infectés [1]. On notera r le coefficient de proportionnalité.
- Le nombre de malades décédant par unité de temps est proportionnel au nombre de malades total. On note τ l'espérance de vie d'un individu contaminé.
- Le temps d'incubation est négligeable. Un individu contaminé est immédiatement malade et contagieux.

1. Les cinétiques de réactions chimiques sont basées sur un modèle de ce type...

- Tout individu est forcément dans l'une des 3 catégories. On ne tient pas compte de la natalité et de la mortalité naturelles de l'espèce.

1. Dans un premier temps, on suppose les populations S et I spatialement homogènes.
   (a) Quelle est l'unité de S, I et R ?
   (b) De quelle(s) variable(s) dépendent-elles ?
   (c) Combien y a-t-il de fonctions inconnues ?
   (d) Ecrivez le système d'EDO régissant le phénomène.
2. On s'intéresse au cas de la rage chez le renard.
   Ce dernier est un animal sédentaire, qui établit son territoire et n'en bouge plus. Sain, ils ne se déplace donc pas dans l'espace.
   Par contre, la rage détruit le système nerveux. Les renards malades perdent donc le sens du territoire et errent plus au moins au hasard. On modélise leur dispersion spatiale par un coefficient de diffusion D.
   (a) Quelles est maintenant l'unité de S et I ?
   (b) De quelle(s) variable(s) dépendent-elles ?
   (c) Modifiez le système d'EDO précédent en un système d'EDP prenant en compte ce dernier phénomène.
   (d) Pourquoi est-il important ?
3. On prend maintenant en compte la natalité et la mortalité naturelles, seulement pour les individus sains (les malades n'en ont pas le temps). Pour la modéliser, on suppose connu le taux de reproduction, et on suppose qu'un territoire donné ne peut pas accueillir plus de $S_\infty(x, y)$ renards par unité de surface.
   (a) Pourquoi à votre avis suppose-t-on que S_∞ dépend des variables d'espace ?
   (b) Modifiez le système d'EDP précédent.

Exercice 2.5 : Bio-convection

Des cellules flagellées, initialement réparties uniformément dans un volume d'eau fermé, nagent pour remonter le gradient de concentration en oxygène dissous, afin de respirer. On appelle se phénomène "oxytaxie". Puisque toutes les cellules se dirigent vers le même but, et que les cellules sont plus denses que l'eau, ce flux de cellules engendre des variations de densité moyenne du fluide, ce qui le met en mouvement (au même titre que les variations de densité engendrées par un gradient de température en convection naturelle). On appelle ce phénomène bio-convection.

1. Sous quelles conditions (réponse qualitative) peut-on définir une fonction continue $n(x, y, z, t)$ représentant le nombre de cellules par unité de volume ?

2. Ecrivez la masse volumique moyenne $\rho(x, y, z, t)$ du fluide. On pourra noter V_0 le volume d'une cellule (supposé constant), ρ_L la masse volumique de l'eau, et ρ_C celle des cellules.
3. Ecrivez les équations de Navier-Stokes pour le mélange. On supposera que la masse volumique du mélange est égale à celle du liquide partout, sauf dans l'expression du poids (hypothèse de Boussinesq), et on simplifiera en faisant apparaître la pression $p^* = p + \rho g z$ en supposant l'axe z orienté vers le haut. On notera $\Delta\rho = \rho_C - \rho_L$.
4. On suppose que les cellules sont agitées par un mouvement de marche au hasard (brownien) lié entre autres au choc contre les molécules d'eau, modélisé par un coefficient de diffusion D. Elles nagent de plus à une vitesse supposée proportionnelle au gradient de concentration (coefficient de proportionnalité noté b). C'est le phénomène d'oxytaxie. Enfin elles sont convectées par la vitesse d'ensemble du fluide $\mathbf{v}$. Ecrivez une équation de conservation du nombre de cellules.
5. Chaque cellule consomme γ moles d'oxygène par unité de temps. Ecrire une équation de conservation de l'oxygène dissous, sachant qu'il est convecté par le mouvement d'ensemble du fluide, et qu'il diffuse dans l'eau avec un coefficient de diffusion D_O.
6. Récapitulez les équations et les inconnues du problème (il peut être utile d'écrire ces dernières en couleur dans les équations pour s'y retrouver...).

Exercice 2.6 : Evolutions compétitives de deux populations animales

1. On appelle parfois *équation logistique* l'EDO $u' = u(1-u)$. On suppose que $u \geq 0$ représente une concentration d'espèce en milieu naturel. Suivant les valeurs initiales de u, donner l'allure du comportement et interpréter ce résultat.
2. On modélise un système "proie-prédateur" par le système d'EDOs :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} &= r_b B\left(1 - \frac{B}{K}\right) - \mu C \\ \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} &= r_c C\left(1 - \tau\frac{\mu C}{B}\right)\end{aligned}$$

   Ici, B représente la population des proies et C représente celle des prédateurs, supposées uniformes dans l'espace. Interpréter les différents facteurs r, μ et K.
3. On observe expérimentalement que la compétition entre espèces produit des migrations et des variations de concentrations spatiales de chaque espèce. Pour rendre compte de ce phénomène, on remplace le modèle précédent par le système d'EDP :

$$\begin{aligned}B_t &= r_b B\left(1 - \frac{B}{K}\right) - \mu C + D_B \nabla^2 B \\ C_t &= r_c C\left(1 - \tau\frac{\mu C}{B}\right) + D_C \nabla^2 C\end{aligned}$$

Interpréter cette nouvelle modélisation. On pourra penser à ce qu'on observe lorsque l'on découvre un nid de fourmis en soulevant une pierre par exemple, et se reporter à l'exercice sur le transport de matière.

Exercice 2.7 : Modélisation des mileux poreux (DS IFI 2014)

Un milieu poreux est constitué d'une matrice solide fixe creusée de micro-canaux, appelés *pores* dans lesquels peut circuler un fluide. On appelle *porosité*, notée ϵ, la fraction volumique occupée par les pores, soit $\epsilon = V_{\text{pores}}/V_{\text{total}}$.

Il serait bien sûr illusoire de vouloir résoudre les équations de la mécanique des fluides dans chaque micro-canal, d'autant plus que la topologie de ces derniers n'est pas connue exactement, seules des propriétés statistiques peuvent être mesurées. On essaye donc de représenter l'écoulement par un modèle donnant la vitesse moyenne du champ de vitesses sur un volume de moyennage petit à l'échelle macroscopique, mais grand devant l'échelle des pores.

Le modèle de Darcy est basé sur une simple proportionnalité entre la vitesse moyenne locale et le gradient de pression moyenne local :

$$\mathbf{v} = -\frac{K}{\eta}\,\mathbf{grad}\,p \tag{1}$$

où K est homogène à une aire et est appelé *perméabilité*, η est la viscosité du fluide circulant dans les pores, $p(x, y, z, t)$ le champ de pression, et $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ le champ de vitesses. On suppose K et η constants dans le temps et uniformes dans l'espace.

Cette équation doit être complétée par l'équation de conservation de la masse, qui s'écrit, pour un milieu poreux :

$$\epsilon\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{2}$$

où $\rho(x, y, z, t)$ désigne la masse volumique moyenne du fluide.

Cas d'un liquide

1. On suppose que la densité du fluide dans les pores est indépendante du temps et de l'espace, soit $\rho = \rho_0$. Rappeler ce que devient l'équation de conservation de la masse, et montrer que l'équation de Darcy se ramène alors à une EDP classique sur l'inconnue $p(x, y, z, t)$.
2. On appelle S la frontière délimitant le milieu poreux, et on la décompose en trois parties : une entrée S_E, des frontières imperméables S_I, et une sortie S_S.
   - Sur S_E, la vitesse normale **entrante** est imposée égale à v_0
   - Sur S_I, la vitesse normale est nulle
   - Sur S_S, la pression est imposée à p_0.

   Ecrire les conditions frontières vérifiées par $p(x, y, z, t)$ sur S_E, S_I et S_S. On notera, comme c'est l'usage, $\mathbf{n}$ le vecteur normal sortant en un point de la frontière.

   Indiquez le type et l'homogénéité de chaque condition frontière.

Cas d'un gaz

3. La densité du fluide dans les pores **ne peut être** considérée indépendante du temps et de l'espace. Il faut donc ajouter une équation reliant ρ et p. On suppose que le gaz subit des transformations isentropiques, soit :

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \tag{3}$$

   (a) Calculez $\mathbf{grad}\, p$ en fonction de ρ et $\mathbf{grad}\, \rho$.

   (b) En utilisant ce résultat, et en combinant les équations (1) (2), montrez que la masse volumique $\rho(x, y, z, t)$ vérifie une EDP de la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathrm{div}\left(\alpha f(\rho)\, \mathbf{grad}\, \rho\right),$$

   où α est une constante et f est une fonction. Expliciter ces dernières.

   (c) De quel type est cette équation ?

   Est-elle linéaire ?

   Donnez un autre exemple physique conduisant à une telle EDP.

Question subsidiaire

4. En faisant un bilan de matière sur un volume V de milieu poreux limité par une surface S, retrouvez l'équation (2). On remarquera que dans chaque élément dV de milieu poreux, le volume accessible au fluide est ϵdV

3 EDPs d'ordre 1. Méthode des caractéristiques

Exercice 3.1 : Résolution graphique

On considère le problème suivant :

$$a(x,t,u)u_t + b(x,t,u)u_x = 0 \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0$$
$$u(x,0) = \varphi(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

où φ est donnée graphiquement (voir Fig. 1, dessin du bas).

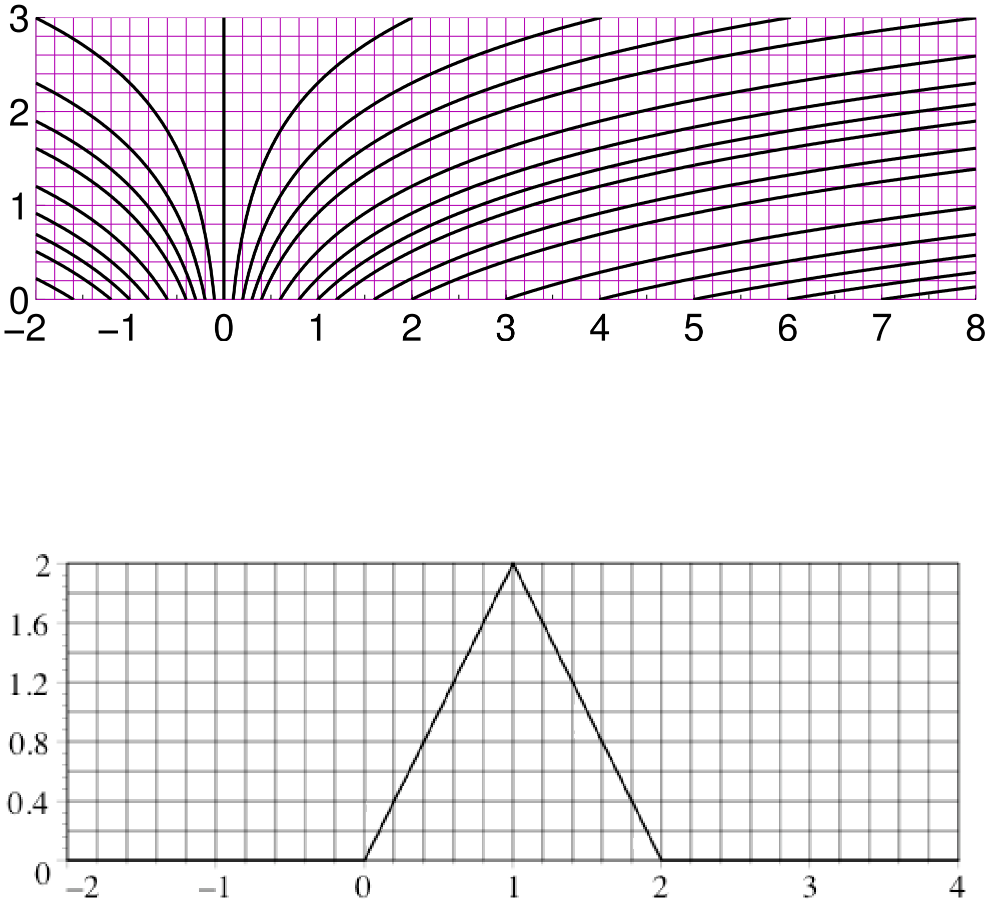

FIGURE 1 – En haut, caractéristiques, en bas condition initiale.

On suppose que le problème est bien posé. Les coefficients de l'équation ne sont pas précisés mais on donne graphiquement un échantillon des caractéristiques de cette équation (voir Fig. 1 dessin du haut).

1. Démontrer que toute solution est constante le long des caractéristiques
2. Construire avec le soin optimal compatible avec ces données $u(x, 1)$. On précisera en particulier ce que deviennent les singularités de φ.

Exercice 3.2 : Equation à coefficients constants sans second membre

1. Trouver la solution du problème :

$$\begin{aligned} u_t + 2u_x &= 0, \\ u(x, t = 0) &= \frac{1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

2. Tracer $u(x, t = 1/2)$ en fonction de x.
3. En déduire une interprétation physique de l'équation.

Exercice 3.3 : Equation à coefficients constants avec second membre

On considère le problème :

$$\begin{aligned} u_t + 2u_x &= -u, \\ u(x, t = 0) &= \frac{1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

1. Les solutions du problème sont-elles constantes le long des caractéristiques ?
2. Trouver la solution générale du problème.
3. Tracer $u(x, t = 1/2)$ en fonction de x.
4. Comparer la solution à celle de l'exercice 3.2, et en donner une interprétation physique.

Exercice 3.4 : Equation à coefficients non constants sans second membre

Soit le problème :

$$\begin{aligned} &yu_x + xu_y = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ &u(0, y) = e^{-y^2} \end{aligned}$$

1. Déterminer les courbes caractéristiques de cette équation. Tracez-les soigneusement.
2. Démontrer que la solution est constante le long des courbes caractéristiques.
3. Résoudre l'équation lorsque c'est possible. Que manque-t-il pour fermer le système ?

Exercice 3.5 : Equation à coefficients non constants sans second membre (DS 2009)

Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x > 0,\ y > 0\}$. On considère alors sur Ω le problème :

$$\begin{aligned} 2yu_x + u_y &= 0 \\ u(x,0) &= f(x) \quad \forall x > 0. \end{aligned}$$

1. Rappeler ce qu'une solution de cette EDP vérifie le long des courbes caractéristiques.
2. Déterminer les courbes caractéristiques et tracez-les soigneusement.
3. Montrer que les solutions de l'EDP sont : $u(x,y) = f(y^2 - x)$
4. Expliquer pourquoi ce problème n'est pas bien posé.

Exercice 3.6 : Equation avec second membre (DS 2009)

Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x > 0,\ y > 0,\ x > y\}$. On considère alors sur Ω le problème :

$$\begin{aligned} yu_x + xu_y &= u \\ u(x,0) &= f(x) \quad \forall x > 0 \end{aligned}$$

1. Dessiner le domaine Ω.
2. Rappeler ce qu'une solution de cette EDP vérifie le long des courbes caractéristiques.
3. Déterminer les courbes caractéristiques et tracez-les soigneusement.
4. Trouvez les solutions du problèmes par la méthode de résolution d'EDO le long des caractéristiques.
5. Retrouvez la solution par un changement de variable.
6. Calculer u dans le cas où $f(x) = xe^{-x^2}$.

Exercice 3.7 : Modélisation du traffic routier

On modélise (de manière très simple) un flux de voitures. On se place sur une route à une seule dimension x, la seule autre variable dépendante est le temps t. On considère une portion de route assez longue pour que la densité linéique de voiture ρ ait du sens.

1. Quelle est la dimension de ρ ? Etablir l'expression du nombre de voitures contenu dans un tronçon de route quelconque $[a,b]$.
2. On note $Q(x,t)$ le nombre de voitures traversant le point x dans le sens positif par unité de temps. Quelle est la dimension de Q ? Etablir l'expression de $Q(x,t)$ en fonction de la vitesse locale des voitures $v(x,t)$.

3. Ecrire le bilan du nombre de voitures contenu sur un tronçon de route quelconque $[a, b]$, et en déduire l'EDP régissant les variations de la densité de voitures. Quelle EDP dans un autre domaine cette équation vous rappelle-t-elle ?
4. Pour résoudre l'équation précédente, il faut une expression de la vitesse v en fonction de la densité ρ. On suppose dans un premier temps $v = v_0$ constante. Rappeler comment on détermine les solutions de cette équation avec la condition initiale :
$$\rho(x, t = 0) = \rho_0(x).$$
5. Expliquer dans quel cas l'hypothèse de vitesse constante devient déraisonnable. Donner une expression de v plus réaliste la plus simple possible, et en déduire l'expression et la représentation graphique de $Q(\rho)$. Donner la nouvelle expression de l'EDP sous la forme classique d'une équation du premier ordre.
6. On suppose une condition initiale du type :
$$\begin{array}{rl} \rho(x,0) = \dfrac{\rho_M}{3} & \text{pour } x < -x_0 \\ \rho(x,0) = \rho_M & \text{pour } x > x_0 \\ \text{variation linéaire} & \text{sur } [-x_0, x_0] \end{array}$$
Représenter cette condition initiale ? A quelle configuration correspond-elle ?
7. Après avoir montré que les caractéristiques sont forcément des droites, tracez-les dans ce cas de figure. Comment évolue la distribution de voitures précédente ? En quoi ce phénomène est-il lié aux catastrophes routières ?

Exercice 3.8 : Décomposition d'une EDP d'ordre 2 en EDP d'ordre 1

Soit l'EDP $u_{xx} - u_{tt} = xt$.

1. Déterminer l'opérateur différentiel linéaire et l'écrire comme produit de deux opérateurs de degré 1.
2. Résoudre $v_x - v_t = xy$ à l'aide du CdV $X = x$, $T = x + t$.
3. Résoudre l'EDP (on pourra effectuer un autre CdV $U = x$ et $V = x - t$)

Exercice 3.9 : Problème de Cauchy (DS 2008)

On considère sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ le problème

$$\begin{array}{c} yu_x - xu_y = 0 \\ u(x,0) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}$$

1. Rappeler ce qu'une solution de cette EDP vérifie le long des courbes caractéristiques.
2. Montrer qu'il s'agit de demi-cercles.
3. Quelle condition doit vérifier f pour qu'il y ait existence d'une solution ?

4. Déterminer les solutions de l'EDP dans le cas $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^4}$.

Exercice 3.10 : Equation d'advection

On considère un modèle d'advection sur le quadrant $x > 0$, $t > 0$:

$$\begin{aligned} u_t + au_x = 0, &\quad x \in \mathbb{R}_+,\, t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x), &\quad x \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

où a est une constante, $a > 0$.

1. Tracer les courbes caractéristiques de ce problème. Que faut-il spécifier pour fermer le problème ?
2. On considère le problème :

$$\begin{aligned} &u_t + au_x = 0, \\ &x \in \mathbb{R}_+,\, t \geq 0 \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}_+ \\ &u(0,t) = u_1(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

   avec u_0 et u_1 suffisamment régulières (par exemple $\mathcal{C}^1$). Quelle est la relation à imposer à u_0 et u_1 en 0 pour pouvoir définir des solutions classiques ?

4 Méthode de séparation des variables

Exercice 4.1 : Problèmes de Sturm-Liouville

Résoudre les problèmes de SL suivants. Résoudre le problème sous-entend trouver le signe de λ (sauf mention contraire), ses valeurs admissibles et la fonction propre associée à chaque valeur.

1. $X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0$
2. $X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(L) = 0$
3. $X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(L) = 0$
4. $X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(L) + \alpha X(L) = 0$
5. $r^2 R'' + rR' + \lambda r^2 R = 0, \quad R(0)$ fini, $\quad R(L) = 0$
   On admettra que nécessairement $\lambda > 0$ dans ce dernier cas, on posera $\lambda = k^2$ et $x = kr$, et on reconnaîtra une équation de Bessel sur $R(x)$. Les plus curieux pourront remarquer que $\lambda < 0$ conduirait à une équation de Bessel modifiée, dont les solutions I_0 et K_0 ne peuvent en aucun cas vérifier les conditions frontières ....
   On consultera l'annexe sur les fonctions de Bessel.

Exercice 4.2 : Méthode de séparation des variables (DS 2008)

Soit le problème :

$$\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} \text{ pour } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ et } t > 0 \\
&u(0,t) = 0, \quad u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0 \\
&u(x,0) = f(x)
\end{aligned}$$

1. Déterminer les conditions initiales et les conditions frontières (préciser le type dans ce cas).
2. Quel(s) phénomène(s) physique(s) représente ce problème (y compris les conditions frontière et initiale) ?
3. Résoudre ce problème à l'aide de la méthode de séparation des variables. On donnera d'abord la forme des solutions et quelles identifications faire avec la fonction f, puis on exprimera la solution lorsque $f(x) = \sin(x) + \sin(5x)$.

Exercice 4.3 : Méthode de séparation des variables (bis)

On considère le problème, pour $\tilde{x} \in [0, L]$ et $\tilde{t} > 0$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} = a\frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}^2} + ku \\
&u(0,\tilde{t}) = 0, \quad u_{\tilde{x}}\left(L, \tilde{t}\right) = 0 \\
&u(\tilde{x}, 0) = g(\tilde{x})
\end{aligned}$$

1. Interprétez ce problème physiquement.
2. Montrer que par un changement de variables on peut se ramener au problème

$$\begin{aligned}&u_t = u_{xx} + Ku,\\&u(0,x) = 0, \quad u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0,\\&u(x,0) = f(x)\end{aligned}$$

   où l'on explicitera la constante K. On va maintenant résoudre ce problème par un changement de fonction inconnue que la question suivante va nous servir à intuiter.
3. Si le terme de diffusion u_{xx} était absent, trouver la solution de l'EDO obtenue.
4. En déduire le changement de fonction à effectuer, et reformuler le problème.
5. Utiliser les résultats de l'exercice 4.2 pour calculer la solution (avec la même condition initiale)
6. Sous quelle condition la solution peut-elle décroître exponentiellement ?

Exercice 4.4 : Vibration d'une corde de guitare (d'après DS 2009)

La question 3 peut être sautée. On veut modéliser la vibration d'une corde de guitare.

On rappelle que l'EDP régissant ce problème est une équation des ondes $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, où $u(x,t)$ représente l'amplitude de la vibration à l'abscisse x.

1. Sachant que la corde est attachée en $x = 0$ et en $x = L$ écrire les conditions frontière.
2. La corde est supposée lâchée sans vitesse initiale et sa forme initiale est supposée donnée par une fonction $u_0(x)$. Ecrire les conditions initiales.
3. On prend

$$u_0(x) = \begin{cases} U_0 \dfrac{x}{l} & 0 \leq x \leq l \\ U_0 \dfrac{L-x}{L-l} & l \leq x \leq L \end{cases}$$

   Représentez cette fonction.
4. Résoudre le problème par la méthode de séparation des variables, en utilisant un problème de Sturm-Liouville dont vous connaissez les solutions, et montrer que la solution s'exprime sous la forme :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n X_n(x) \cos(\omega_n t)$$

   où on précisera les fonctions propres X_n, ω_n une grandeur qu'on exprimera en fonction de n et des données du problème, et les A_n seront calculés à la question suivante. Quelle est la dimension de la grandeur ω_n ?

5. En utilisant le fait que les fonctions X_n sont orthogonales, calculez les A_n. On donne :

$$\int_0^L u_0(x)X_n(x)\,dx = u_0\frac{L}{(n\pi)^2}\frac{\sin(n\pi\alpha)}{\alpha(1-\alpha)} \qquad \text{où } \alpha = \frac{l}{L}$$

6. (Question subsidiaire). On donne $L = 65$ cm, $c = 143$ m/s. Quelle est la fréquence fondamentale de la corde (premier terme de la série) ? A votre avis, entend-on beaucoup d'autres fréquences émises par la corde ?

Exercice 4.5 : Détermination d'éléments propres

Soient μ, a et b trois constantes réelles avec $a > 0$ et $b > 0$. Pour $0 < x < a$ et $0 < y < b$, on considère le problème homogène suivant :

$$\begin{aligned} &v_{xx} + v_{yy} + \mu v = 0 \\ &v(0,y) = v(a,y) = 0 \\ &v_y(x,0) = v_y(x,b) = 0 \end{aligned}$$

Trouver les valeurs propres μ_n et fonctions propres v_n de ce problème en utilisant la méthode de séparation des variables. On s'arrangera pour retomber sur un des problèmes de Sturm-Liouville traités dans l'exercice 4.1

Exercice 4.6 : Vibrations d'une membrane rectangulaire

On s'intéresse aux vibrations d'une membrane rectangulaire de côtés a et b est bloquée sur les arêtes $x = 0$ et $x = a$, et libre de tout mouvement sur ses arêtes $y = 0$ et $y = b$. Sa déformation initiale est donnée par $u(x, y, t = 0) = f(x, y)$ et elle est lâchée sans vitesse initiale.

1. Rappeler l'équation de propagation des ondes en 2D, écrite en coordonnées cartésiennes. On notera c la vitesse de propagation.
2. Ecrire les conditions aux frontières. Pour trouver la condition sur les frontières libres, on se reportera au problème de la corde pour laquelle on avait montré que la tension était proportionnelle à u_x.
3. Ecrire les conditions initiales.
4. On cherche des solutions sous la forme $u(x, y, t) = v(x, y) \times T(t)$. Montrer que v vérifie le problème de l'exercice précédent.
5. En utilisant les résultats de l'exercice précédent, puis en résolvant l'équation sur T, trouver la forme de la membrane au cours du temps, en prenant $f(x, y) = u_0 \sin(\pi x/a) \cos(2\pi y/b)$. Quelle est la fréquence de la vibration.
6. Comment procéderait-on pour trouver la solution pour une forme initiale de la membrane $f(x, y)$ quelconque ?

Exercice 4.7 : Vibrations d'une membrane rectangulaire (bis)

Reprendre l'exercice 4.6 pour une membrane bloquée sur ses 4 arêtes. On prendra $f(x, y) = U_0 \sin(3\pi x/a) \sin(\pi y/b) + U_1 \sin(\pi x/a) \sin(5\pi y/b)$

Exercice 4.8 : Vibrations d'une membrane circulaire. Fonctions de Bessel

Reprendre l'exercice 4.7 pour une membrane circulaire de rayon a bloquée sur son périmètre. On prendra comme condition initiale $f(r, \theta) = U_0 J_0(\alpha_1 r/a)$ où J_0 est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0, et α_1 son premier 0. Cette condition initiale étant à symétrie axiale (indépendante de θ, la solution le sera aussi et on cherchera simplement $u(r, t)$ où r est la distance au centre de la membrane.

On pourra utiliser les résultats de l'exercice 4.1 question 5.

5 Problèmes non-homogènes.

Exercice 5.1 : Homogénéisation et séparation des variables

On considère le problème suivant :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} = a\frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{x}^2}\\
&v(0,\tilde{t}) = 0\\
&v_{\tilde{x}}(L,\tilde{t}) = \tilde{\phi}_0\left[1+\sin\left(\omega\tilde{t}\right)\right]\\
&v(\tilde{x},0) = v_0(\tilde{x})
\end{aligned}$$

1. Que représente physiquement ce problème ? Que peut-on prévoir de la solution ?
2. Montrer que par un changement de variables sur $\tilde{x}$ et $\tilde{t}$, le problème peut être ramené à

$$\begin{aligned}
&v_t = v_{xx}\\
&v(0,t) = 0\\
&v_x\left(\frac{\pi}{2},t\right) = \phi_0\left[1+\sin\left(\Omega t\right)\right]\\
&v(x,0) = v_0(x)
\end{aligned}$$

3. En posant $u(x,t) = v(x,t) - f(x,t)$, où $f(x,t)$ est une fonction que l'on déterminera, trouver un nouveau problème qui ait ses deux conditions aux frontières homogènes.
4. Vérifier que le nouveau problème est équivalent à celui de l'exercice 4.2 avec un terme inhomogène en plus dans l'EDP, et suggérer une forme de solution.
5. On donne, pour $x \in [0,\pi/2]$:

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\left[(2n+1)x\right]$$

   Montrer que l'EDP précédente se ramène à un système d'EDO que l'on écrira et résoudra.
6. On donne la condition initiale $v_0(x) = 0$. Trouver les solutions des EDO et en déduire l'expression de la solution $u(x,t)$ sous forme de série. En déduire $v(x,t)$. La solution est-elle conforme à ce que l'on attendait ?

Exercice 5.2 : Oscillations forcées d'une corde

On considère une corde dont la hauteur $u(x,t)$ à l'abscisse x et au temps t vérifie l'EDP :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

La corde est fixée à son extrémité $x = 0$ et est soumise à une oscillation $f(t)$ à son autre extrémité $x = L$. Nous supposons la corde au repos à l'instant $t = 0$ et lâchée sans vitesse initiale. On supposera de plus $f(0) = 0$.

1. Exprimer les conditions initiales et les conditions aux frontières.
2. Donner la décomposition de la fonction $h(x) = \frac{x}{L}$ en série de sinus (ou série de Fourier-sinus) sur l'intervalle $[0, L]$. (on notera β_n ces coefficients).
3. Expliquer pourquoi on ne peut pas chercher une solution $u(x, t)$ qui s'écrive pour tout t comme une série de sinus. Considérer la fonction $w(x, t) = u(x, t) - \frac{xf(t)}{L}$. Déterminer l'EDP que w vérifie ainsi que les conditions initiales et aux limites que vérifie w.
4. En décomposant $w(x, t) = \sum b_n(t) \sin(\frac{n\pi x}{L})$, déterminer l'équation différentielle que vérifient les harmoniques b_n en fonction de β_n. (On posera $\omega_0 = \frac{\pi c}{L}$).
5. On suppose maintenant que $f(t) = \ell \sin(\omega_1 t)$. Montrer que $p_n(t) = K_n \sin(\omega_1 t)$ est solution particulière de l'équation des harmoniques. Déterminer alors toutes les solutions de cette équation, on utilisera les conditions initiales de la corde pour déterminer les constantes.
6. Donner l'expression de $w(x, t)$ sous forme de série de sinus

Exercice 5.3 : Effet Larsen

Préambule : cet exercice est très proche de l'exercice 5.2

On considère une corde, maintenue fixe aux deux extrémités, et soumise, en plus de sa tension, à une force extérieure variable dans le temps (par exemple la pression exercée par un son ambiant). L'EDP s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t)$$

La corde est initialement immobile et sans vitesse initiale.

1. Ecrire les conditions aux frontières et initiales.
2. Si on supprimait le terme inhomogène de l'EDP, écrire le problème de Sturm-Liouville auquel conduirait la méthode de séparation des variables, et rappeler ses fonctions propres (d'après l'exercice 4.1)
3. Suggérer une solution du problème inhomogène sous forme de série de ces fonctions propres.
4. Développer la fonction $h(x) = 1, x \in [0, L]$ en série sur la base des fonctions propres précédentes et montrer que l'EDP non-homogène se ramène à un système d'EDO. On prend maintenant $f(t) = F_0 \sin(\omega t)$.
5. Résoudre les EDO (on posera $\omega_n = n\pi c/L$)
6. Que se passe-t-il quand la fréquence de l'excitation ω approche $n\pi c/L$, où n est un entier impair ? Comment cela peut-il se produire et quelle en est la conséquence pratique ?

6 TP COMSOL.

Exercice 6.1 : Cuisson d'un rôti

On fait cuire un rôti au four. On note λ sa conductivité thermique, ρ sa masse volumique, c_p sa capacité calorifique massique. Le rôti est initialement à température ambiante et plongé dans un four à 200 °C. On considère le rôti comme un cylindre infiniment long et on raisonnera donc en 2D les coordonnées cartésiennes (x, y). On cherche le profil de température $T(x, y, t)$ dans une section de coupe du rôti au cours du temps.

On a les données suivantes :

$\lambda = 0.6\ \mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$, $c_p = 1000\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$, $\rho = 1100\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$.

La section du rôti sera choisie de forme en gros circulaire (une ellipse fera l'affaire) de plus grand diamètre typique 15 cm, et d'épaisseur 7-8 cm.

1. Ecrire l'EDP régissant le problème, ainsi que la condition initiale.
2. On suppose dans un premier temps que la température de surface du rôti est celle de l'air environnant. Ecrire la condition frontière à la surface et résoudre le problème sous COMSOL.

   On utilisera le mode `Modes EDP -> EDP classiques -> Equation de de la chaleur` en géométrie `2D` et en transitoire. **On prendra soin d'appeler la variable T au lieu de u**

   Important : Attention aux points suivants :
   - Toutes les constantes numériques doivent être entrées comme des constantes en utilisant le menu `Options -> Constantes`
   - Avant de rentrer le temps de simulation dans le menu `Résoudre -> Paramètre des solveurs` , on réfléchira à un ordre de grandeur pertinent pour ce dernier.
3. On suppose maintenant que la surface du rôti n'est pas à la température de l'air, et on remplace la condition par une condition d'échange convectif avec un coefficient d'échange $h = 20\ \ \mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}$. Réécrire la condition frontière et résoudre à nouveau le problème sous COMSOL. En comparant le résultat au précédent, qu'en concluez-vous ? Quelle solution préconisez-vous pour accélérer la cuisson ? Faites des essais.

Exercice 6.2 : Déformation statique d'une membrane

On considère une membrane circulaire fixée sur sa frontière (bref, un tambour…) soumise à son propre poids, et sur laquelle on peut poser des poids de forme et de masses données.

L'équation régissant le déplacement vertical $u(x, y)$ de la membrane est, sous réserve que les déformations ne soient pas trop grandes :

$$T_0 \nabla^2 u = \rho(x, y) g$$

en comptant les déformations positives si elles sont vers le haut, ρ est la distribution de masse par unité de surface, et g la pesanteur. On prendra une membrane de 40 cm de diamètre, tendue avec une tension à vide $T_0 = 500$ N/m, et de masse par unité de surface $\rho_S = 0.1$ kg.m^{-2}.

1. Comment s'appelle l'équation ? Quel(s) autre(s) phénomène(s) physique(s) réagit-elle ? S'agit-il d'un problème stationnaire ou transitoire ?
2. Avec COMSOL, trouvez la déformée de la membrane soumise à son propre poids. On utilisera le menu `Options -> Constantes` pour définir toutes les constantes numériques.
3. On pose une masse circulaire de 5 kg et de 4 cm de diamètre au centre de la membrane. Utiliser COMSOL pour tracer la déformée. On utilisera le menu `Options -> Expressions -> Expressions scalaires` pour définir la fonction $\rho(x, y)$.

   On rappelle qu'en MATLAB, la fonction égale à une constante c lorsque la condition $a < b$ est vérifiée, et zéro sinon, s'écrit juste `(a < b) * c`. Par ailleurs, les variables spatiales en COMSOL s'appellent `x` et `y`
4. En utilisant des constantes et des expressions scalaires au maximum, calculez la déformation de la membrane soumise à deux poids m_1 et m_2 de rayons respectifs R_1 et R_2, placés en (x_1, y_1) et (x_2, y_2).

Exercice 6.3 : Vibration d'une membrane

Traiter le problème de l'exercice 4.7 avec COMSOL mais en supposant qu'on tape sur la membrane initialement au repos avec une baguette (vitesse initiale non nulle). On considérera que l'impact de la baguette impose une vitesse constante sur un disque de rayon 1 cm. On prendra une membrane de 40 cm sur 40 cm et une vitesse de propagation de 200 m/s.

Exercice 6.4 : Thermique d'un mur chauffé par le soleil

Traiter le problème de l'exercice 5.1 avec COMSOL (après avoir rappelé son sens physique). On prendra un mur en béton de 40 cm d'épaisseur. Les données du béton sont :

$\lambda = 0.92$ W m^{-1} K^{-1}, $c_p = 880$ J kg^{-1} K^{-1}, $\rho = 2400$ kg m^{-3}.

La densité de flux solaire maximale sera prise égale à 500 W m^{-2}.

A Fonctions de Bessel

A.1 Equation de Bessel

C'est une EDO du second ordre :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{4}$$

où n est généralement un entier mais pas forcément. Sa solution est engendrée par les deux fonctions $J_n(x)$ qui est finie en 0 (et y est nulle pour $n > 0$) et $Y_n(x)$ qui diverge en 0. Les premières fonctions J_n et Y_n sont représentées Fig. 2.

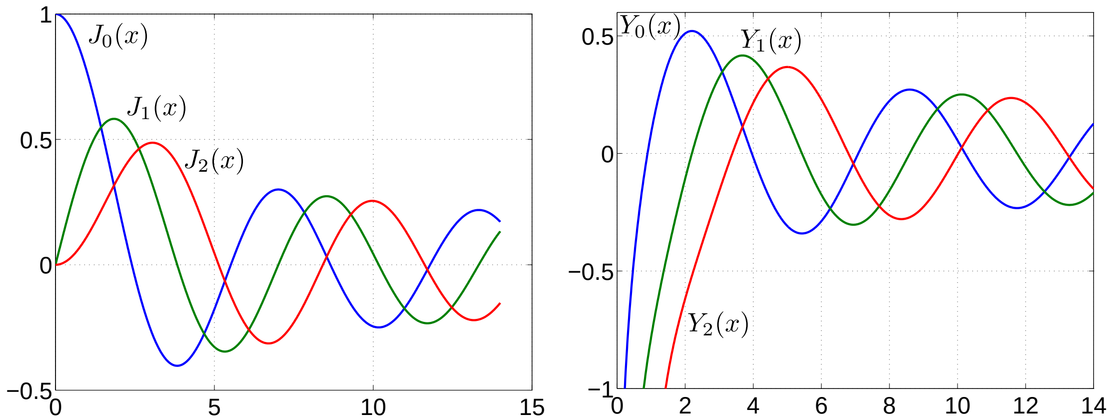

FIGURE 2 – Fonctions de Bessel

Elles ont de nombreuses propriétés intéressantes. Tout d'abord, on voit que ces fonctions oscillent et se comportent visuellement comme du sinus amorti pour x grand. On montre en effet que pour $x \gg 1$:

$$J_n(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \pi/4\right) \qquad Y_n(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \pi/4\right) \tag{5}$$

Ces approximations sont bien pratiques pour initialiser la recherche des zéros numériquement (par exemple avec MATLAB). On peut voir les fonctions de Bessel comme des analogues des fonctions trigonométriques en cylindriques.

Ensuite, les fonctions de Bessel se déduisent les unes des autres par dérivation. On a :

$$\frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) = x^n J_{n-1}(x) \tag{6}$$

L'équation (4) découle de la séparation des variables du Laplacien en coordonnées cylindriques. De nombreux problèmes d'EDP en cylindriques ont donc des solutions faisant intervenir les fonctions de Bessel.

Si on note α_p et α_q deux zéros de $J_n(x)$, les fonctions $J_n(\alpha_p x)$ et $J_n(\alpha_q x)$ sont orthogonales avec pour fonctions poids x :

$$\int_0^1 xJ_n(\alpha_p x)J_n(\alpha_q x)\,dx = \frac{\delta_{pq}}{2}\left[J_{n+1}\left(\alpha_p\right)\right]^2 \tag{7}$$

ce qui permet les développements en série de Bessel d'une fonction quelconque sur $[0, 1]$:

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_n(\alpha_p x) \tag{8}$$

où n est quelconque et les α_p sont les zéros de $J_n(x)$, et les coefficients A_p calculés en utilisant l'équation d'orthogonalité (7).

A.2 Equation de Bessel modifiée

Il y a un signe $-$ devant x^2 à a place du $+$:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (x^2 + n^2)y = 0 \tag{9}$$

Les solutions sont les *fonctions de Bessel modifiées* I_n et K_n, représentées sur la figure 3

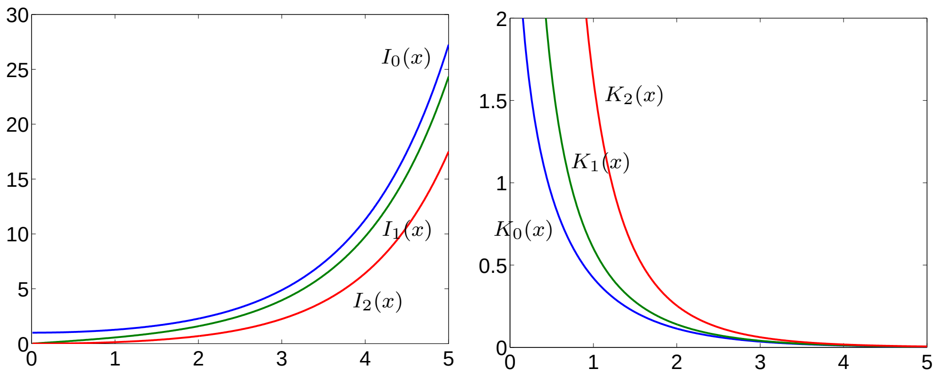

FIGURE 3 – Fonctions de Bessel modifiées

Elles sont toujours positives. On peut voir les fonctions de Bessel modifiées comme des analogues des fonctions hyperboliques cosh et sinh en cylindriques. Elles sont aux fonctions de Bessel ce que sont cosh et sinh à cos et sin.