

Les premières civilisations

Mésopotamie :

Entre le Tigre et l'Euphrate

-3500 -2000 : **Sumériens**

-1800 -1500 : **Babyloniens**



Plusieurs centaines de tablettes d'argile frappées au stylet en écriture cunéiforme. 300 d'entre elles concernent les mathématiques (Numération et arithmétique)

Système de numération : Combinaison de systèmes sexagésimal et décimal, principe mixte d'addition et de position.

Deux signes pour l'unité ▼ et dix : <

Représentation des entiers :

$$\lll \begin{matrix} \blacktriangledown \\ \blacktriangledown \end{matrix} \quad 3*10+4*1=34$$

$$\blacktriangledown \lll \blacktriangledown \blacktriangledown \quad 1*60+3*10+2*1=92$$

$$\blacktriangledown < \blacktriangledown \quad 1*60+1*10+1*1=71$$

$$\blacktriangledown \blacktriangledown < \blacktriangledown \blacktriangledown \quad 1*3600+0*600+1*60+1*10+2*1=3672$$

Pratique de l'addition, multiplication (tables) et divisions (tables d'inverses)

Représentation des fractions :

60 ayant beaucoup de diviseurs, il est simple d'écrire $1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/12, 1/15, 1/20, 1/30$

$3/2 = 1 + 1/2 = 1 + 30/60$ noté $\nabla \lll$

A donné naissance (et est encore utilisé) dans la représentation du temps et des angles.

Les connaissances mathématiques sont appliquées aux échanges de monnaie ou de marchandise, aux calculs d'intérêts, de taxes, aux répartitions de récoltes.

Tous les problèmes des tablettes sont de nature économique.

Certains conduisent à des équations du 1er et 2nd degré. Une algèbre est naissante.

Egypte :

-4000

-3000 Début de l'ère pharaonique

-2800 -2100 Ancien Empire

Construction des pyramides

-2100 -1580 **Moyen Empire**

-1580 -1100 **Nouvel Empire**

Ramsès II

-525 Conquête par les Perses

-332 **les Grecs** (Alexandre le grand)

-30 **les Romains** (mort de Cléopâtre)

+640 **les Arabes**



Papyrus Rhind (British Muséum): Manuel de 85 problèmes écrits par le scribe Ahmès vers -1650

Deux systèmes d'écriture des nombres :

Hiéroglyphique (pictural) et **hiératique** : stylisation des hiéroglyphes en vue de faciliter l'écriture manuelle.

Le système de numération est additionnel en base 10 :



$= 2 * 1 + 4 * 10 + 2 * 10^4 + 1 * 10^5 + 1 * 10^6 = 1\ 120\ 042$

En dehors des entiers, les égyptiens ne conçoivent que les fractions unitaires, écrites en faisant surmonter le dénominateur d'un symbole particulier.

L'arithmétique s'organise autour de quelques règles :

- * multiplier et diviser par 2 n'importe quel nombre entier
- * multiplication quelconque «à l'égyptienne», ie en se ramenant à des opérations par 2.

*Problème de la décomposition en fractions unitaires.

Les problèmes proviennent de la vie quotidienne :

Répartition de récoltes de grains ou d'animaux

Algèbre quasi inexistante (contrairement aux babyloniens)

Géométrie : Liée aux ornements et aux constructions d'habitation

Angles droits, cercles

Volumes connus du cube et des pyramides

Les mathématiques Grecques

Villes principales :

VIII avant JC Milet (Ionie. Asie Mineure)

VI avant JC Sparte et Athènes

-330 Alexandrie (Alexandre le Grand)

-146 Annexion à Rome

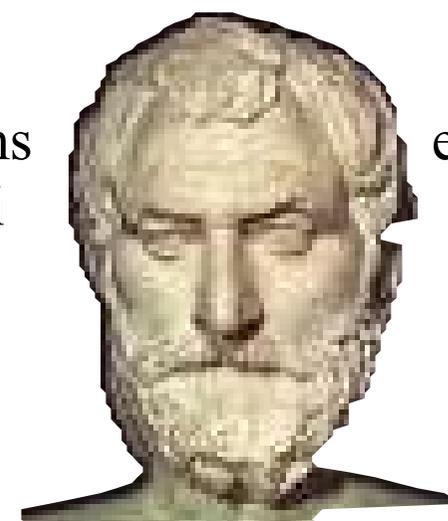
-30 Mort de Cléopâtre. Alexandrie passe sous contrôle Romain
mais reste la gardienne des traditions grecques

640 Prise d'Alexandrie par les Arabes

Période classique

En contact avec les peuples orientaux (Babylone, Egypte) les grecs assimilent leurs connaissances et rendent les mathématiques abstraites et déductives.

Thalès de Milet:(-625 -547) Homme d'état, commerçant, ingénieur, astronome, philosophe et mathématicien. Grand voyageur, il apprend l'algèbre et la géométrie des Egyptiens des babyloniens. Fondateur de la géométrie grecque, on lui doit plusieurs propositions mais sans doute pas de démonstration. Invente un procédé géométrique pour mesurer la distance d'un navire au rivage et la hauteur des pyramides.



et

Pythagore de Samos: (-569 -500) Né dans l'île de Samos au large de Milet. Elève de Thalès. Voyage en Egypte et à Babylone. S'installe à Croton, colonie grecque du sud de l'Italie. Fonde une «secte» religieuse, philosophique et scientifique à vocation politique.

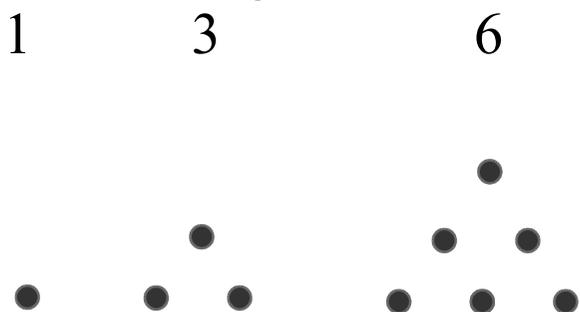


Il vise une explication cosmologique globale la trouve dans le Nombre.

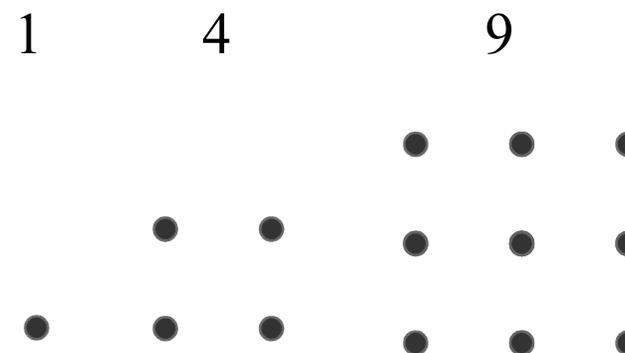
«Toute Chose est Nombre»

Son étude des nombres (arithmétique : arithmos=nombre) est encore très liée à la géométrie :

Nombres triangulaires :



Nombres carrés :



Etudie les propriétés arithmétiques de nombres : pairs impairs, diviseurs, nombres premiers, nombres amis etc.

Se limite en fait aux entiers et aux rapports des entiers entre eux (rationnels)

Théorie des proportions (issue de l'étude musicale).

Moyenne arithmétique et moyenne « harmonique »

La découverte (et la démonstration) de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ par **Hippase de Métaponte** sanctionne l'échec de l'adéquation du monde aux nombres entiers et provoque la première crise de l'histoire des mathématiques.

Sophistes : Vème siècle avant JC.

La première grande école Athénienne est celle des sophistes : Enseignants professionnels ambulants.

Joutes d'argumentations.

Platon et Aristote n'y verront que de vains dialecticiens et les critiqueront sévèrement.

Les problèmes mathématiques qu'étudient les sophistes sont presque tous liés aux **trois célèbres problèmes grecs** : Etudes géométriques et construction à la règle et au compas.

Duplication du cube - Trisection de l'angle -
Quadrature du cercle

Qui hanteront les esprits pendant des siècles avant que l'on montre que ces trois problèmes n'ont pas de solution «constructible» à la règle et au compas.



Recherche mathématique et philosophie sont étroitement liées dans la Grèce antique :

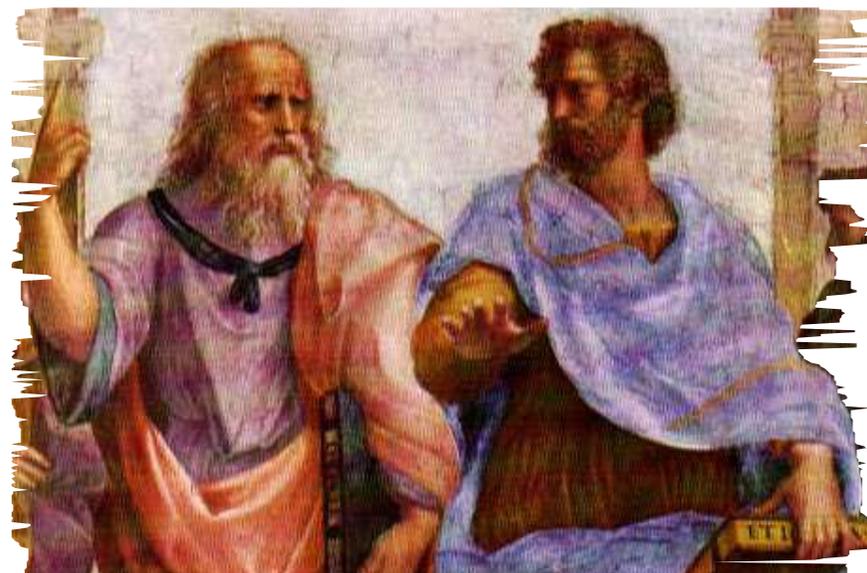
Platon (-472 -347) inscrit à l'entrée de son académie :

«Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre»

faisant des connaissances mathématiques une condition d'admission dans le cercle de ses disciples.

Son élève et rival, **Aristote**, codifie les lois du raisonnement dans la **logique** et en fait l'instrument de la pensée, capable de dicter ses lois à la nature.

Il élabore une théorie qui propose des explications de l'ensemble des phénomènes naturels appelé philosophie naturelle.



Nul n'a marqué autant qu'Aristote la pensée occidentale :

«Savoir c'est connaître par le moyen de la démonstration.»

L'Ecole d'Alexandrie :

Alexandre le grand fait d'Alexandrie sa capitale. Elle devient le centre culturel du monde antique.

Straton, élève d'Aristote y crée le Musée, communauté de savants professionnels, payés pour se consacrer à la recherche scientifique.

Le Musée contient une bibliothèque de 700 000 volumes. On y enseigne la littérature, les mathématiques, l'astronomie et la médecine.

Le Musée attire de nombreux savants étrangers (Grecs, Egyptiens, Juifs...) qui élargissent l'horizon scientifique.

A partir du IIIème siècle avant JC, les mathématiques gagnent en autonomie, indépendante de la philosophie et de la religion.

C'est la période de production la plus riche des mathématiques grecques.

Les éléments d'Euclide :

Euclide aurait vécu au III^{ème} siècle avant JC à Alexandrie et y aurait enseigné la géométrie. Ses travaux ont influencé le développement des mathématiques pendant 2000 ans.

Les éléments d'Euclide constituent un ouvrage fondamental dans l'histoire des mathématiques. Non seulement Euclide y réalise une synthèse des connaissances mathématiques grecques, mais il va surtout donner aux énoncés mathématiques et à leurs preuves leur forme "moderne", démonstrative et hypothético-déductive, encore utilisée de nos jours.



Les éléments de Géométrie d'Euclide sont l'ouvrage qui répond le mieux à la triple exigence :

- Choix des notions «premières»
- Rigueur de la charpente logique
- Clarté des démonstrations

Archimède :

Inventeur de génie, habile mécanicien, il allie la rigueur théorique au souci de la recherche d'applications.

Il découvre une méthode de calcul d'aires et de volumes (Méthode d'exhaustion), ancêtre du calcul intégral, et l'applique à la recherche de centres de gravité et au calcul de tangentes.



Eratosthène : Calcul de la longueur du méridien terrestre, algorithme permettant de «cribler» les nombres premiers inférieurs à un nombre donné.

Apollonius : Etude complète des coniques

Trigonométrie :

L'astronomie est l'application privilégiée des géomètres. Le postulat de la sphéricité des cieux et de la terre réclame un outil de calcul adapté : la trigonométrie.

Ménélaüs rédige un traité sur les sphériques.

Ptolémée étend les résultats et étudie la longueur des cordes du cercle. L'Almageste de Ptolémée sera le livre de référence des astronomes jusqu'à l'abandon de l'hypothèse géocentrique de l'univers.

Algèbre : C'est à Alexandrie qu'arithmétique et algèbre (étude des solutions d'équations) se sont peu à peu détachées de la géométrie.

Sensible chez Archimède, Apollonius et Ptolémée, cette tendance s'affirme avec **Héron d'Alexandrie** qui n'identifie plus les nombres à des longueurs mais les considère en tant que tels et surtout **Diophante** qui développera les premières techniques algébriques de résolution d'équations.

A partir de la mort de Cléopâtre (-31) les mathématiques Alexandrines commencent leur déclin.

Les inventeurs s'essoufflent et font place aux commentateurs (**Pappus** +300)

Romains et premiers chrétiens se moquent des sciences et n'hésitent pas à brûler les traités «païens».

A l'arrivée des Musulmans en 640 toute activité scientifique a cessé à Alexandrie.

La civilisation Arabe

Moins d'un siècle après la mort de Mahomet (632) et la prise d'Alexandrie (640), les Arabes ont conquis d'immenses territoires allant de l'Inde à l'Espagne, comprenant Afrique du nord et Italie du sud, ne s'arrêtant qu'aux frontières de la Chine.

L'immense Empire à d'abord pour capitale Damas en Syrie puis se scinde au VIII ème siècle en Royaume d'Orient (Bagdad) et d'Occident (Cordoue).

Les Arabes assimilent rapidement les modes de pensée et les conceptions intellectuelles des pays conquis et entreprennent d'édifier une civilisation et une culture propre.

La science est une des institutions des cités Musulmanes qui deviennent les foyers du savoir scientifique. Les Califes les protègent, fondent des observatoires, des académies, des bibliothèques, envoient des émissaires à la recherche de manuscrits.

L'Arabe devient la langue internationale des lettrés et des savants. Durant 7 à 800 ans les Arabes seront les dépositaires du savoir.

L'armature de la pensée scientifique des Arabes est héritière de la culture Grecque et principalement des grands maîtres d'Alexandrie : Euclide, Ptolémée, Diophante, Archimède,...qui font l'objet de traduction et d'études approfondies auxquelles participent les premiers grands savants (**Thabit Ibn Qurra**), ce qui va insuffler une nouvelle vigueur à ces oeuvres.

Mais les Arabes savent aussi assimiler les apports indiens (Aryabhata, Brahmagupta..), et principalement la numération décimale de position et l'usage du zéro popularisée par les célèbres traités **d'Al Khwarizmi**

La contribution des mathématiques Arabes est décisive dans le domaine de l'**Algèbre** qu'ils constituent en discipline autonome. Elle est tout à la fois science théorique, technique algorithmique et art du calcul.



Al Khwarizmi, Omar Khayyam



La méthode expérimentale naît dans les sciences Arabes, en particulier en mécanique, astronomie et optique.

Partout ils manifestent le souci d'allier l'observation et la mesure exacte. Ceci est à l'origine des développements en **trigonométrie**

Nasir Al Din Al Tusi

L'occident médiéval chrétien mettra plusieurs siècles à assimiler cet héritage.