

1)

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2(2 - \lambda)$$

1 valeur propre double : 1

1 valeur propre simple : 2

$$Au = u \implies x = x; y = y; z = y - x$$

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y - x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre double est de dimension 2.

$$Au = 2u \implies x = 2x; y = 2y; y = x \implies x = 0; y = 0$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre simple est de dimension 1.

Les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres correspondantes. La matrice A est donc diagonalisable.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On peut calculer P^{-1} et vérifier que $D = P^{-1}AP$.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3)

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1023 & -1023 & 1024 \end{pmatrix}$$