

IMT Mines Albi-Carmaux
École Mines-Télécom

Travaux Dirigés d'Automatique
—
Commande des Systèmes
Linéaires Continus

◇ M1 ◇

UE ICCP – module CSy

Les séances de Travaux Dirigés de **commande des systèmes linéaires continus** – notées TD4, TD5, ... dans votre emploi du temps – sont réparties sur 7 créneaux de 1h30. La séquence conseillée est la suivante :

— Problème n°1 : Analyse d'un procédé chimique

TD4 → asservissement avec correction proportionnelle ;

TD5 → correction I et étude d'une perturbation ;

TD6 → correction PI ;

TDM2 → analyse et simulation à l'aide de Matlab jusqu'à la correction PI incluse ;

TDM3 → analyse et simulation à l'aide de Matlab, correction PID.

— Problème n°2 – Régulation de température

TD7

— Problème n°3 – Asservissement de niveau dans un bac, synthèse de correcteurs PI

TD8

Problème n°1

Analyse d'un procédé chimique

Le procédé chimique considéré est composé de deux cuves chauffées, agitées et disposées en série. L'objectif du système de commande est de maintenir la température $\theta_2(t)$ de sortie de la deuxième cuve à une température de consigne $\theta_c(t)$ en agissant sur les tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ des réchauffeurs électriques. Le principe de fonctionnement de ce procédé est représenté sur la figure 1.1.

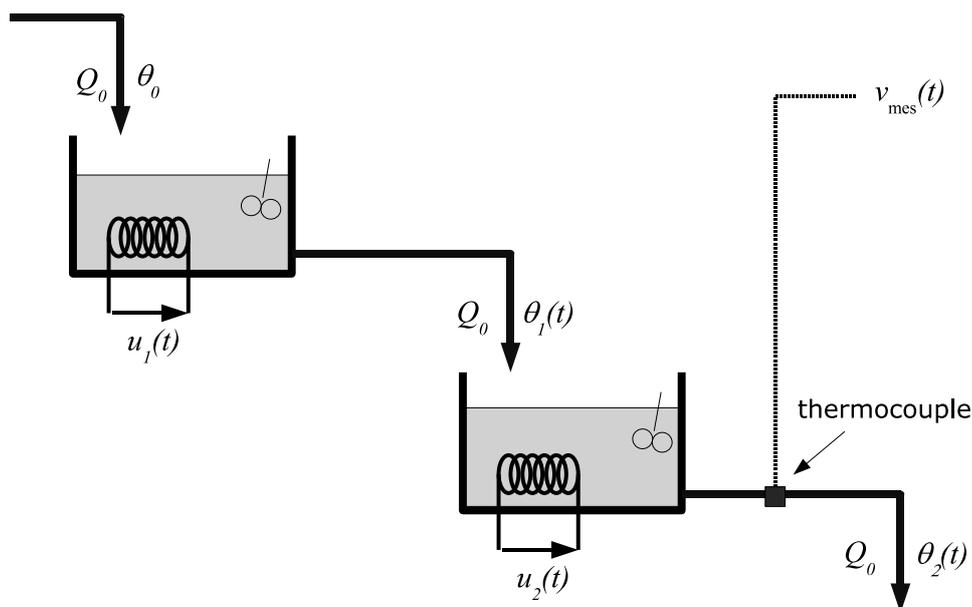


FIGURE 1.1 – Schéma fonctionnel du procédé chimique

On considère que

- le système est en équilibre du point de vue des débits : tous les débits entrants et sortants sont constants (égaux à Q_0), le volume de liquide dans chaque cuve étant alors également constant ;
- la température du liquide d'entrée de la première cuve est constante et égale à θ_0 ;
- le thermocouple (capteur de la température $\theta_2(t)$ renvoyant la mesure $v_{mes}(t)$) est parfaitement linéaire et se comporte comme un gain $K_t = 0.15 \text{ V}/^\circ\text{C}$.

Ce système n'est pas linéaire dans son fonctionnement global (échanges thermiques). Toutefois, en considérant un point de fonctionnement du système et des petites variations des différents signaux autour de ce point, l'analyse peut raisonnablement se faire sur un modèle linéarisé. C'est dans cette hypothèse que nous travaillons ici.

1.1 Modélisation (modèle de représentation autour d'un point de fonctionnement)

Plusieurs expériences ont été menées sur le procédé à partir de l'état d'équilibre choisi comme point de fonctionnement (on note d'une * les variations autour de ce point) :

- une variation de type échelon de 0.1 volt sur l'entrée $u_1(t)$ a conduit à l'évolution de la température $\theta_1(t)$ représentée sur la figure 1.2 ;

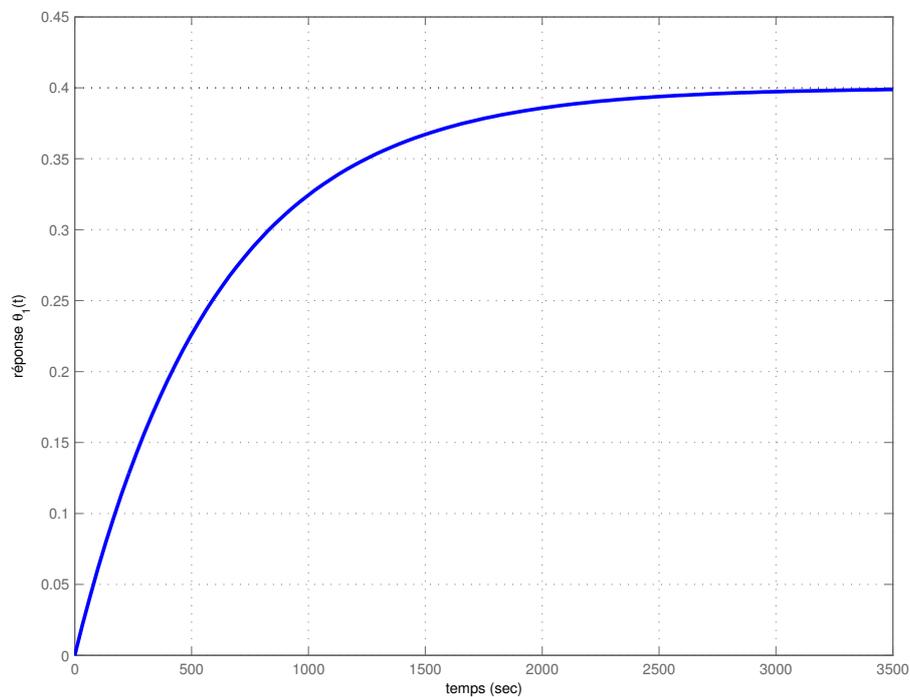


FIGURE 1.2 – Réponse $\theta_1(t)$ à un échelon d'amplitude 0.1 volt

- une augmentation de $u_2(t)$ de 10 à 12 volts a pour conséquence une augmentation de la température $\theta_2(t)$ de 85 à 90°C avec un comportement semblable à celui d'un modèle du premier ordre ; $\theta_2(t)$ atteint 95% de sa variation totale (variation de 4.75°C) au bout de 30 minutes (1800s) ;
- une expérience similaire a permis d'étudier l'influence des variations de θ_1 sur les variations de θ_2 ;

Ces expériences ont permis de déterminer les fonctions de transfert suivantes :

$$G_1(p) = \frac{\Theta_1^*(p)}{U_1^*(p)} = \frac{4}{1 + 600p}$$

$$G_2(p) = \frac{\Theta_2^*(p)}{U_2^*(p)} = \frac{2.5}{1 + 600p}$$

$$G_3(p) = \frac{\Theta_2^*(p)}{\Theta_1^*(p)} = \frac{1}{1 + 1200p}$$

Le schéma-blocs du procédé est donné sur la figure 1.3.

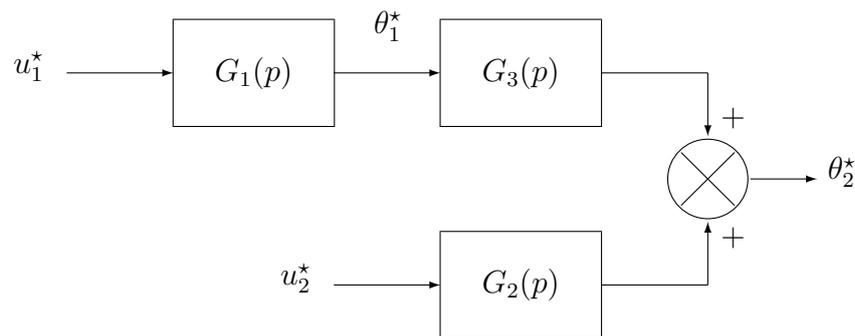


FIGURE 1.3 – Schéma-blocs du procédé

1.2 Asservissement en température du procédé

1.2.1 Correction proportionnelle sur la commande $u_2(t)$

On souhaite asservir le système avec une correction élémentaire (correction proportionnelle de gain K) sur le signal $u_2(t)$. Le signal de consigne sera noté $\theta_c(t)$.

L'analyse se fait autour du point de fonctionnement.

Dans cette section, on supposera que le signal $u_1(t)$ est maintenu constant.

1. Dessiner le schéma-blocs de l'asservissement ;
2. Ecrire la fonction de transfert en boucle fermée $F_2(p) = \frac{\Theta_2^*(p)}{\Theta_c^*(p)}$.
L'écrire sous forme canonique et en faire l'analyse en fonction de la valeur de correction K .
Illustrer le propos en vous servant du résultat de la figure 1.4.

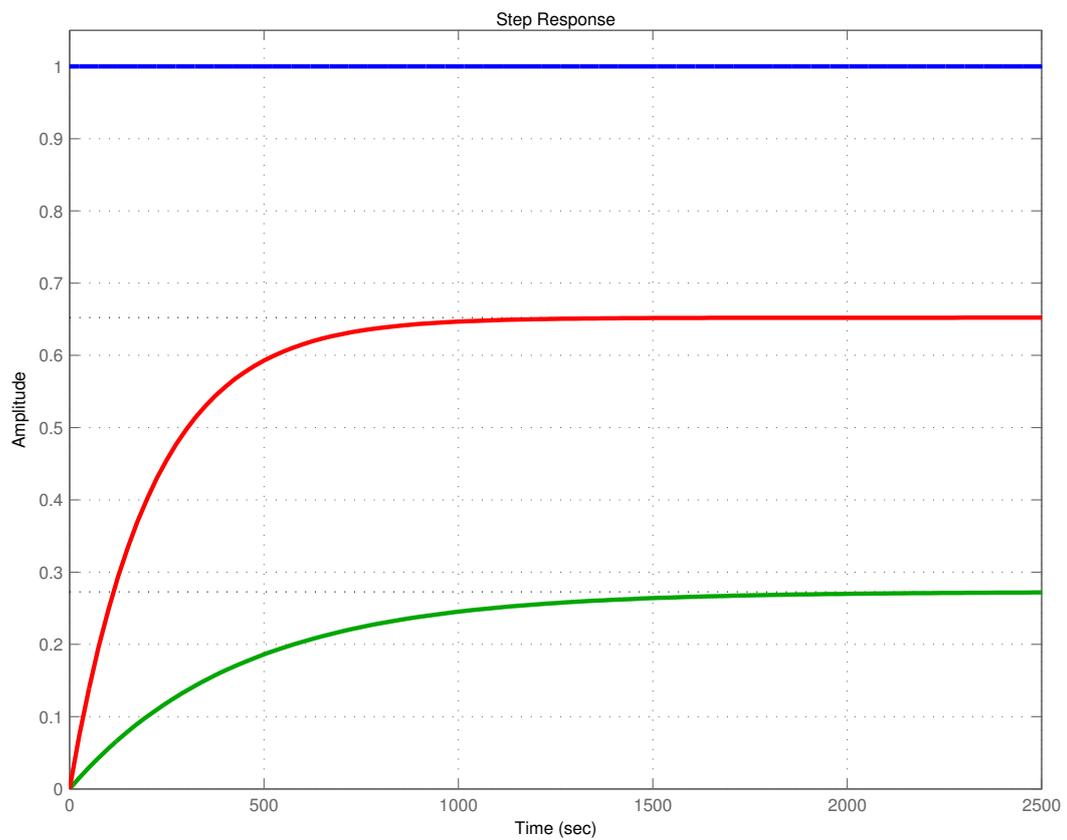


FIGURE 1.4 – Réponse indicielle de l'asservissement pour $K = 1$ et $K = 5$

1.2.2 Correction proportionnelle sur la commande $u_1(t)$

On asservit désormais le procédé en température en réglant le signal $u_1(t)$ qui devient signal de commande.

Dans cette section, on supposera que le signal $u_2(t)$ est maintenu constant.

1. Dessiner le schéma-blocs de l'asservissement ;
2. Ecrire la fonction de transfert en boucle fermée $F_1(p) = \frac{\Theta_2^*(p)}{\Theta_c^*(p)}$.
L'écrire sous forme canonique ;
3. Donner l'expression du gain statique de $F_1(p)$ en fonction de K . Commenter ;
4. Pour les trois valeurs de $K = 1, 5$ et 20 , donner la valeur du gain statique, de l'amortissement (noté ξ) de l'asservissement et de son temps de réponse à 5%. Interpréter ces résultats en utilisant les réponses indicielles reportées sur la figure 1.5.

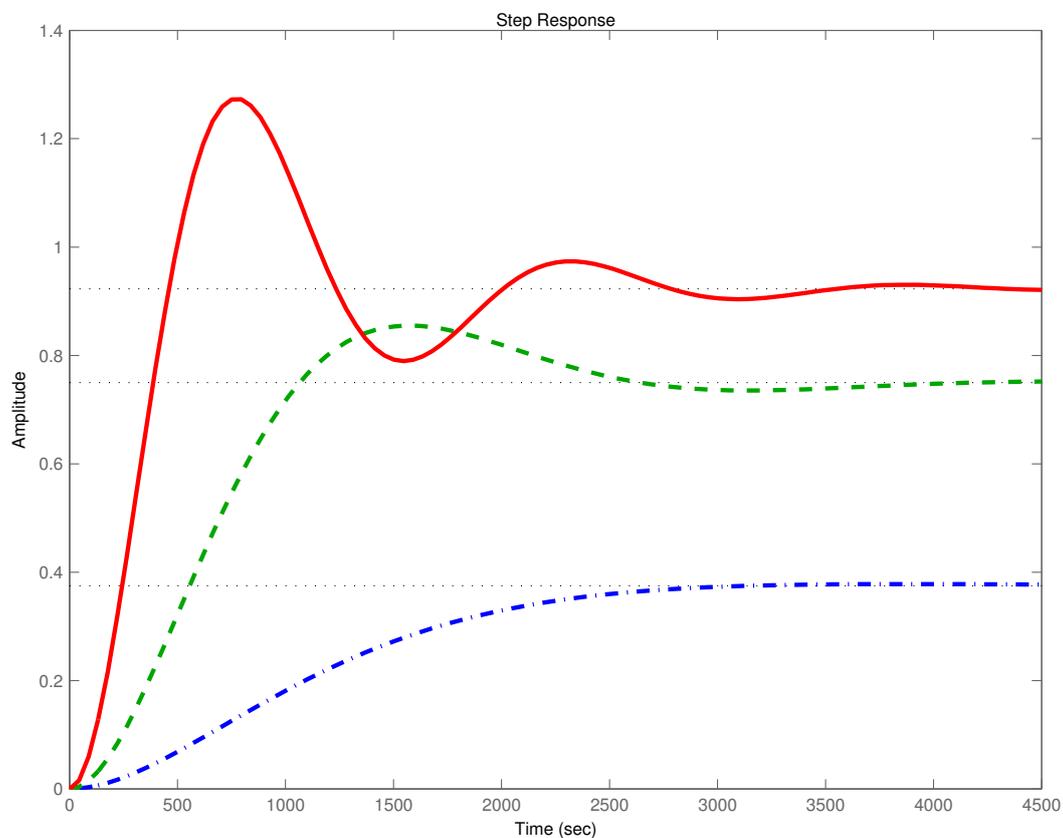
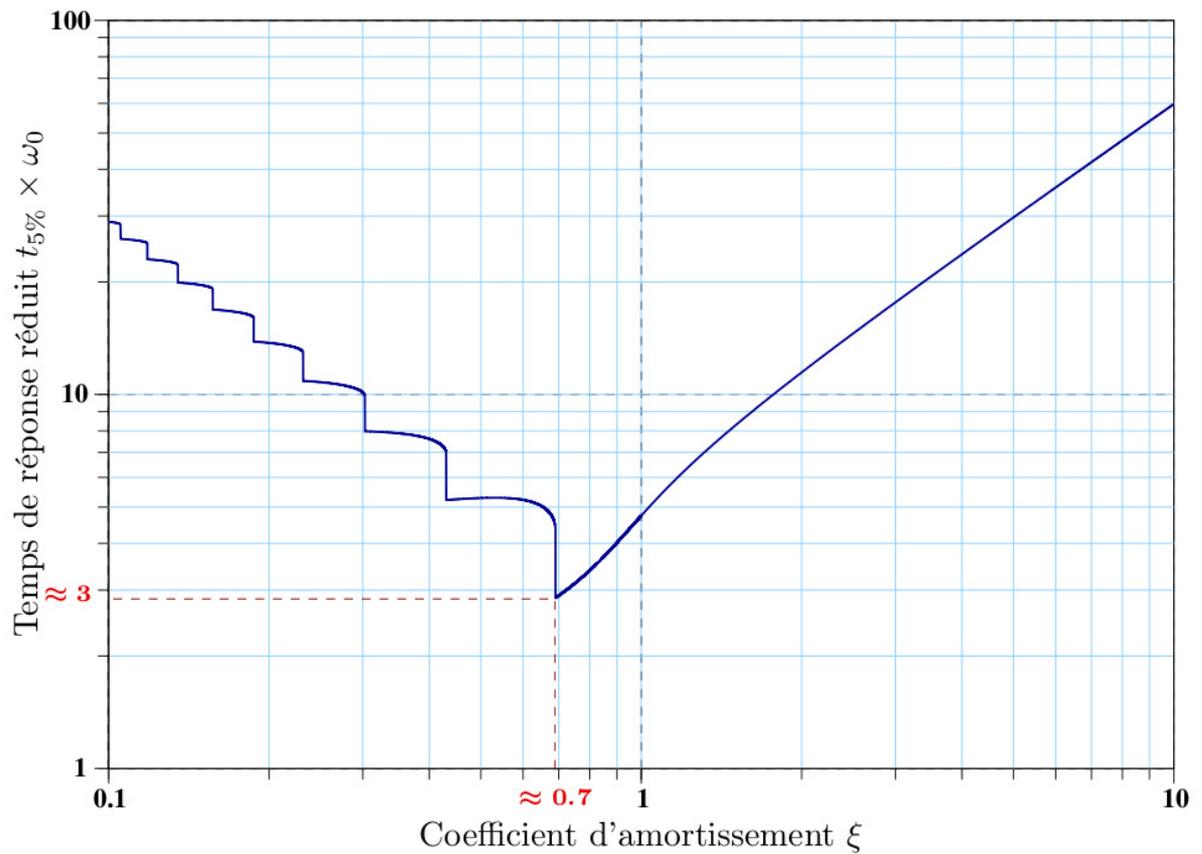


FIGURE 1.5 – Réponse indicielle de l'asservissement $F_1(p)$ en fonction de K



1.2.3 Comparaison

Comparer qualitativement la correction sur $u_1(t)$ et sur $u_2(t)$.

1.3 Analyse d'une correction intégrale

On pose :

$$G(p) = G_1(p)G_3(p) = \frac{\Theta_2^*(p)}{U_1^*(p)} = \frac{4}{(1 + 600p)(1 + 1200p)}$$

On réalise l'asservissement de température du procédé comme indiqué sur le schéma-blocs de la figure 1.6 avec une correction intégrale pure : $D(p) = \frac{K}{p}$

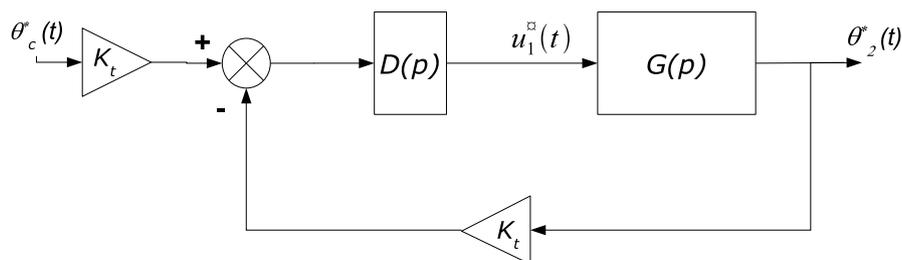


FIGURE 1.6 – Schéma-blocs de l'asservissement

1. Donner l'expression de la fonction de transfert $T(p)$ en boucle ouverte.
2. Donner l'expression de la fonction de transfert $F(p)$ en boucle fermée.
3. Calculer l'erreur de position de cet asservissement. Qu'apporte la caractéristique intégrale de la correction à l'asservissement ?
4. Calculer l'erreur de vitesse (de traînage) de l'asservissement. Conclure.
5. La réponse harmonique en boucle ouverte pour $K = 1$ est donnée sur la figure 1.7. Donner la valeur des marges de stabilité.

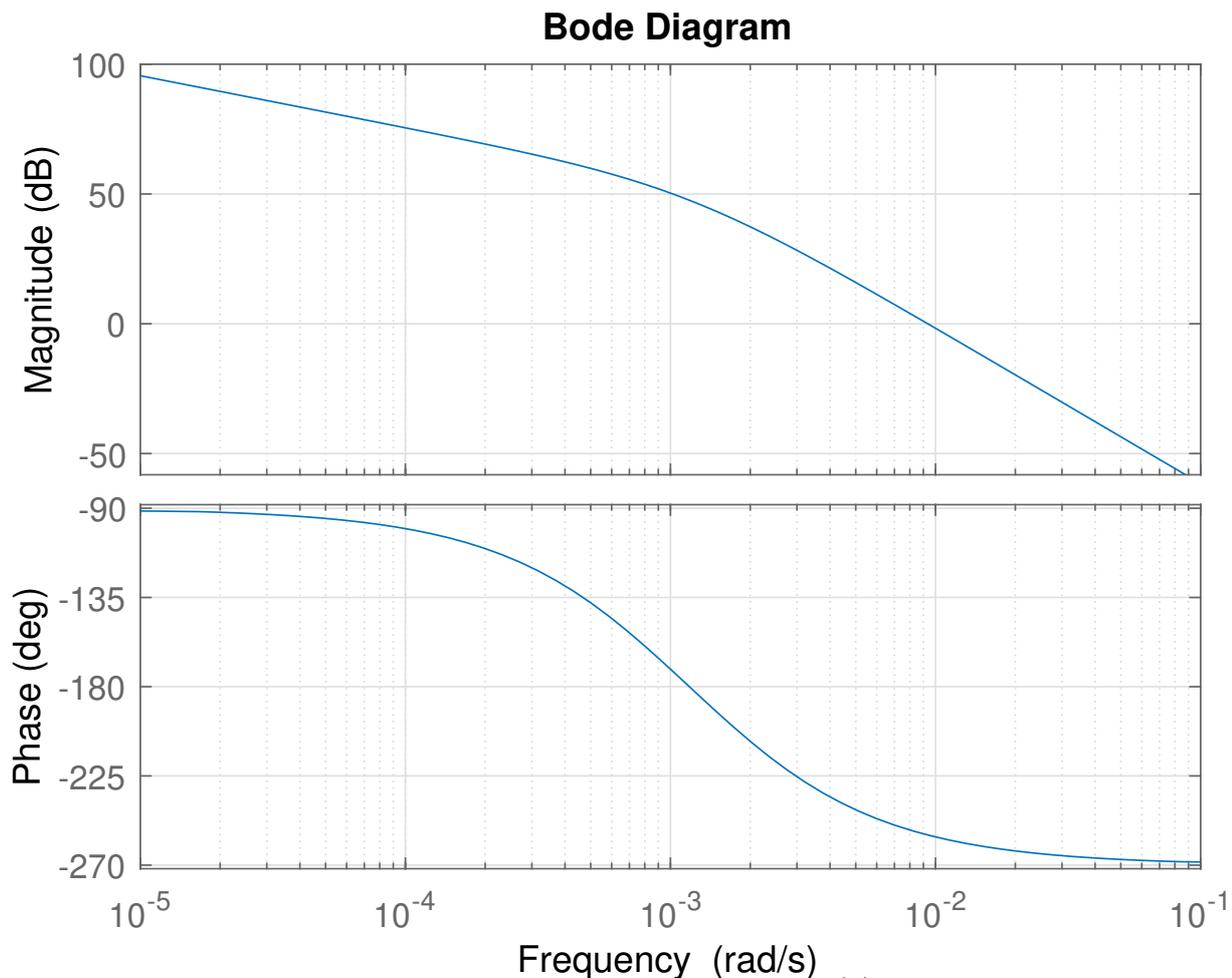


FIGURE 1.7 – Réponse harmonique de $T(p)$ pour $K = 1$

6. L'asservissement est-il stable pour $K = 1$? Justifier.
7. A l'aide du tracé harmonique en boucle ouverte et en donnant la démarche, donner la condition que doit remplir K pour que l'asservissement soit stable.
8. Retrouver ce résultat en utilisant le critère de Routh.
9. Déterminer la valeur de K pour que l'asservissement ait une marge de phase de 45° . Donner sa marge de gain.
10. Déterminer la valeur de K pour que l'asservissement ait une marge de gain de 6 dB. Donner sa marge de phase.
11. A titre de synthèse, on remplira le tableau suivant et on en fera ensuite l'analyse :

	M_φ	M_g	stabilité	$\varepsilon_p(+\infty)$	$\varepsilon_v(+\infty)$
$K = 1$					
$K_{lim=}$			limite		
$K_1 =$	45°				
$K_2 =$		6 dB			

12. Commenter les résultats de la figure 1.8.

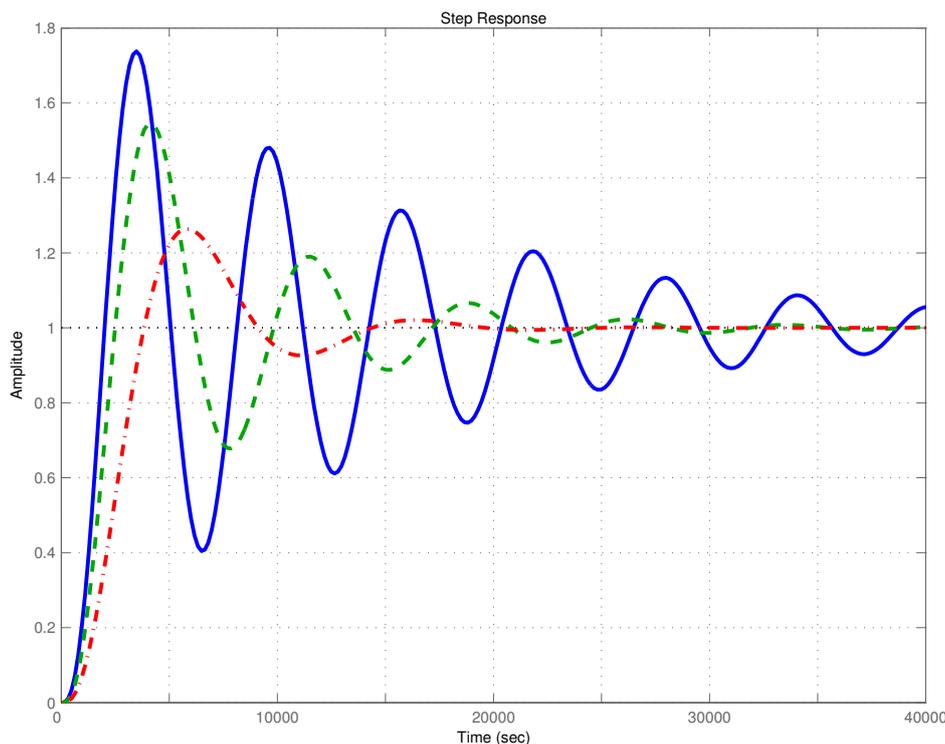


FIGURE 1.8 – Réponses indicielles de l'asservissement avec correction intégrale pour $K = 10^{-3}$, $K = 2.10^{-3}$ et $K = 3.10^{-3}$

1.4 Etude d'une perturbation sur l'asservissement

On considère l'asservissement de la figure 1.6. On suppose maintenant qu'une perturbation de température s'exerce sur le système. Dans cette section, le correcteur $D(p)$ pourra être un correcteur proportionnel de gain K ou le correcteur intégral étudié dans la section 1.3.

1. Modifier le schéma-blocs de la figure 1.6 pour faire apparaître une perturbation de température $\omega(t)$ juste après la sortie du bloc $G(p)$.
2. Ecrire l'expression de la sortie $\Theta_2^*(p)$ en fonction de la consigne et de la perturbation ;
3. Discuter des notions d'asservissement et de régulation du système ;
4. Quel serait, en régime permanent, l'effet d'une perturbation de type échelon d'amplitude ω_0 dans le cas d'une correction proportionnelle puis d'une correction intégrale.

1.5 Correction Proportionnelle-Intégrale (PI)

Pour que l'asservissement présente une erreur de position nulle **et** des caractéristiques dynamiques (temps de montée, de réponse et premier dépassement) *acceptables* – comme par exemple celles obtenues pour une correction proportionnelle $K = 5$ (paragraphe 1.2.2) – nous proposons de faire la synthèse du correcteur PI de fonction de transfert :

$$D(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)$$

avec $K = 5$ et $T_i = 2000$. La réponse harmonique de la fonction $K_t G(p)$ est reportée sur la figure 1.9.

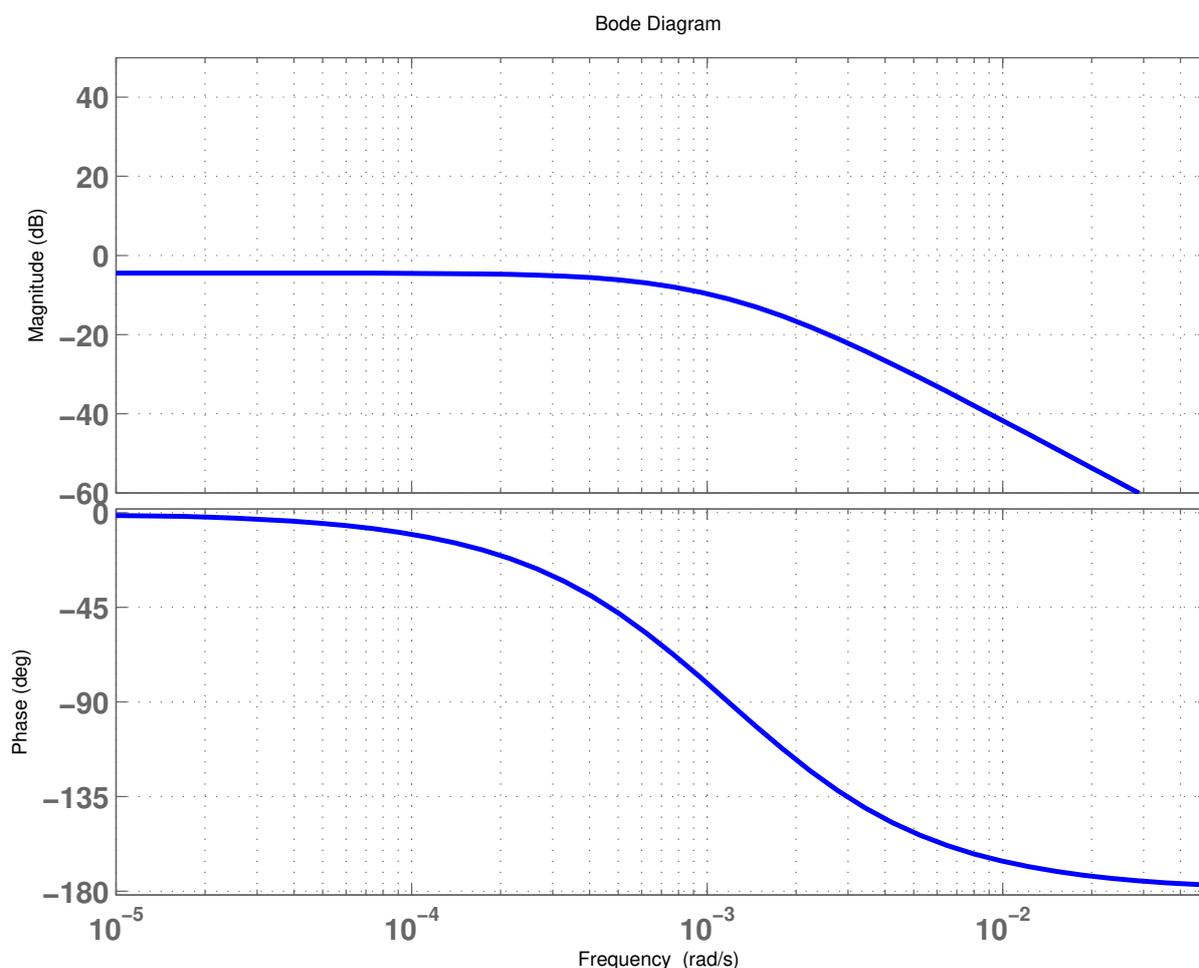


FIGURE 1.9 – Lieu de transfert de $K_t G(p)$

1. A quoi correspond le lieu de transfert représenté sur la figure 1.9 ?
2. Tracer le comportement asymptotique de $D(p)$ sur le même graphique ;
3. Déduire le lieu de transfert en boucle ouverte. Mesurer la marge de phase ;
4. La réponse indicielle de l'asservissement est reportée sur la figure 1.10. Commenter les performances dynamiques et en précision de cet asservissement. Comparer le correcteur proportionnel intégral aux correcteurs étudiés précédemment.

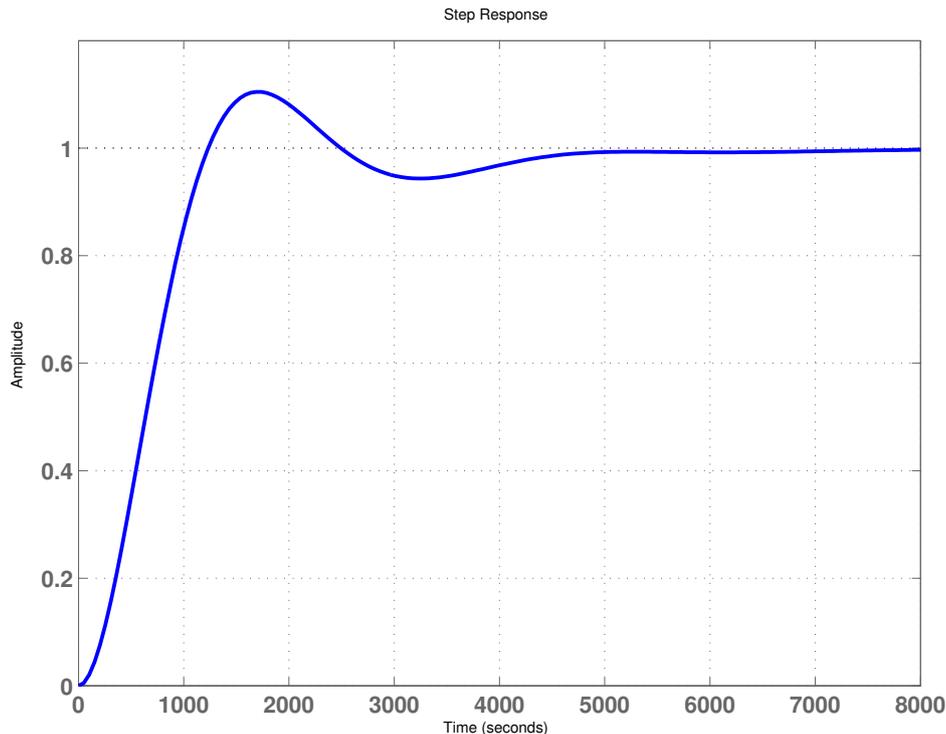


FIGURE 1.10 – Réponse indicielle de l'asservissement

1.6 Synthèse d'un correcteur PI

On se propose de régler le correcteur PI en compensant le pôle dominant de $G(p)$.

1. Calculer la valeur de T_i qui permet de réaliser la compensation ;
2. Calculer la FTBO du système après compensation ;
3. Calculer la valeur de K_i qui confère au système asservi une marge de phase de 50° ;
4. Existe-t-il une valeur de K_i qui peut déstabiliser le système asservi ?
5. Pour une consigne qui varie sous forme d'un échelon unité, calculer le 1er dépassement relatif et le temps de réponse à 5% de la réponse. Comparer avec la réponse de la figure 1.10.

1.7 Analyse et simulation à l'aide de MATLAB

On considère le procédé linéarisé en considérant la correction sur la commande $u_1(t)$. La fonction de transfert du procédé à commander s'écrit :

$$G(p) = G_1(p) \times G_3(p) = \frac{K_1}{(1 + \tau_1 p)} \times \frac{K_3}{(1 + \tau_3 p)}$$

avec $K_1 = 4$, $\tau_1 = 600\text{s}$, $K_3 = 1$ et $\tau_3 = 1200\text{s}$.

Le capteur est assimilable à un gain $K_t = 0.15\text{V}/^\circ\text{C}$.

Trois correcteurs de fonctions de transfert $D_1(p)$, $D_2(p)$ et $D_3(p)$ vont être étudiés et comparés.

[Entre crochets seront données les commandes MATLAB à utiliser – leur syntaxe peut être obtenue grâce à l'aide en ligne avec la commande *help*]

1.7.1 Correction Proportionnelle – $D_1(p) = K$

1. Après avoir *proprement* défini les différents paramètres et les différentes fonctions de transfert sous MATLAB, écrire les fonctions de transfert $T(p)$ en boucle ouverte et $F(p)$ en boucle fermée [*feedback*] pour une correction proportionnelle de gain $K = 5$, $K = 20$ et $K = 50$.
2. Faire l'analyse de la correction proportionnelle à partir du lieu des racines [*rlocus*].
3. Quelle est la fonction de transfert *utilisée* pour le critère des *marges de stabilité*? Quel est l'objectif de ce critère? Donner les marges de stabilité [*margin*] pour les trois cas. Quelle conclusion peut-on tirer du résultat de marge de gain?
4. Donner les pôles [*pole*] de la fonction de transfert en boucle fermée, le coefficient d'amortissement [*damp*] et tracer les réponses indicielles [*step*] de l'asservissement pour les 3 valeurs de K .
5. Etablir le lien entre le premier dépassement, le coefficient d'amortissement et la marge de phase.
6. Démontrer que l'erreur de position est finie, qu'elle égale $\frac{1}{1+KK_1K_3K_t}\theta$ et que sa valeur correspond aux résultats obtenus sur les tracés indiciels.
7. Démontrer que l'erreur de vitesse est infinie. En faire une illustration à l'aide de MATLAB.

1.7.2 Correction Intégrale – $D_2(p) = \frac{K}{p}$

1. Pour $K = 1$, écrire la nouvelle fonction de transfert $T(p)$ en boucle ouverte.
2. Tracer le lieu de Bode du correcteur.
3. Tracer l'évolution des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée [*rlocus*] en fonction de K . Discuter de la stabilité de l'asservissement en fonction de K .
4. Refaire la démarche de l'analyse de la stabilité de l'asservissement à partir de la mesure des marges de stabilité.
5. Pour deux ou trois valeurs de K représentatives, tracer la réponse indicielle de l'asservissement. Commenter les résultats obtenus en terme de caractéristiques dynamiques et de performances en précision de l'asservissement.
6. Démontrer que l'erreur de vitesse est finie. En faire une illustration à l'aide de MATLAB.

1.7.3 Correction Proportionnelle Intégrale – $D_3(p) = \frac{K}{T_i p}(1 + T_i p)$

On pose $K = 20$ et on considère trois valeurs de T_i : $T_i = 1000s$, $2600s$ et $7000s$.

1. Faire l'analyse du correcteur seul dans le plan de Bode (savoir positionner la pulsation $\frac{1}{T_i}$). Quel est l'intérêt de ce correcteur? Qu'apporte-t-il aux *basses* fréquences? Aux

hautes fréquences ?

Ce type de correcteur peut-il améliorer le degré de stabilité de l'asservissement ?

2. Comparer les marges de phase obtenues avec le correcteur $D_3(p)$ pour les différentes valeurs de T_i à celle obtenue pour une correction proportionnelle $D_1(p) = K$ de gain $K = 20$.
3. Tracer les réponses indicielles de l'asservissement pour les correcteurs $D_3(p)$ ainsi que pour la correction proportionnelle $K = 20$; faire le lien avec la question précédente.
4. Discuter du compromis *temps de réponse/degré de stabilité* sur le choix de T_i . En déduire une méthode de placement de P.I.

1.7.4 Placement d'un P.I.D. par synthèse dans le plan de Bode

On souhaite placer un correcteur qui satisfasse le cahier des charges :

- le temps de montée (raideur) de l'asservissement doit correspondre à celui mesurée pour un gain proportionnel de valeur 20 ;
- l'erreur de position de l'asservissement doit être nulle ;
- la marge de phase doit être de 70° .

Pour répondre à ce cahier des charges, on propose de calculer le correcteur :

$$D_4(p) = 20 \times \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)(1 + T_d p)$$

que l'on comparera à la correction proportionnelle de gain 20.

1. Pour quelle raison le correcteur $D_4(p)$ peut-il satisfaire le cahier des charges ?
2. En utilisant l'algorithme de réglage vu en cours, calculer le bon paramètre T_d ;
3. Déduire la valeur d'ajustement K ;
4. Quel choix est-il judicieux de faire pour T_i ;
5. Définir, sous Matlab, le correcteur $D_4(p)$;
6. Comparer, dans le plan de Bode, la marge de phase dans le cas de la correction proportionnelle et dans celui du correcteur $D_4(p)$;
7. Illustrer l'effet du correcteur dans le plan de Nyquist comparativement à la correction proportionnelle ;
8. Comparer les réponses indicielles des deux asservissements considérés. Commenter.

1.7.5 Placement d'un P.I.D. par la méthode du modèle

On souhaite placer un correcteur qui satisfasse le cahier des charges :

- l'erreur de position de l'asservissement doit être nulle ;

- le premier dépassement doit être de l'ordre de 5% ;
- le temps de réponse de l'asservissement ne doit pas excéder 1/4 d'heure (900s).

Pour répondre à ce cahier des charges, on propose de calculer le correcteur :

$$D_5(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p)(1 + T_d p)$$

1. On choisit de compenser le pôle rapide du système pour obtenir une fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 2.
Quelle valeur doit prendre T_i ? Justifier ;
2. Pour quelle raison le correcteur $D_5(p)$ peut-il satisfaire le cahier des charges ?
3. Traduire les spécifications désirées en terme de ξ et de ω_n (tels que définis dans le cours) ;
4. Déduire les paramètres K et T_d ;
5. Définir, sous Matlab, le correcteur $D_5(p)$;
6. Comparer les réponses indicielles des deux asservissements considérés.
Commenter.

Problème n°2

Régulation de température

On dispose d'une enceinte dont on souhaite réguler la température par le contrôle d'un débit de vapeur.

Le système représenté sur le schéma fonctionnel de la figure 2.1 décrit le fonctionnement d'une enceinte à chauffage indirect. Il est constitué d'une vanne que l'on va commander (application d'une tension $u(t)$ sur un servomoteur permettant d'ouvrir ou de fermer la vanne), d'un échangeur eau-vapeur, d'une enceinte dont on veut commander la température en agissant sur la vanne et d'une pompe à débit constant. De l'ouverture de la vanne va découler le débit de vapeur, la température de l'eau dans l'échangeur, le débit de vapeur et la température de l'enceinte.

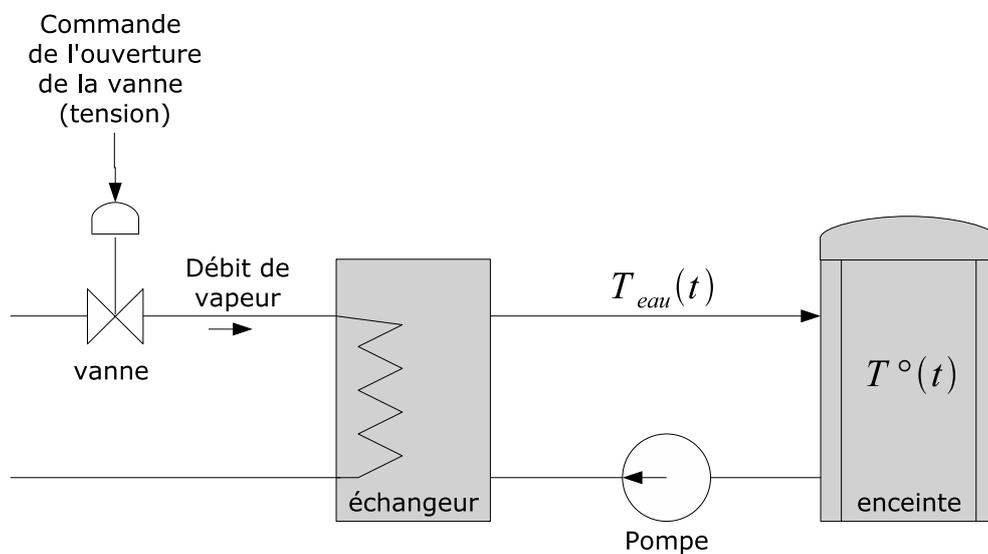


FIGURE 2.1 – Enceinte à chauffage indirect

Suite à une ouverture rapide de la vanne, l'évolution de la température $T^o(t)$ est décrite par un comportement du second ordre – premier ordre au carré – dont le gain statique $K_e = 20^\circ\text{C}/(\text{m}^3/\text{s})$ et la constante de temps $\tau_e = 1200\text{s}$ (20 min).

Le modèle du servomoteur est donné :

$$\frac{X(p)}{U(p)} = \frac{K_p}{p(1 + \tau_p p)}$$

pour lequel $x(t)$ est la position linéaire de la soupape montée sur l'arbre du moteur. On donne $K_p = 2.10^{-4}\text{m/V}$ et $\tau_p = 0.5\text{s}$.

La fonction de transfert de la vanne est assimilable à un gain de valeur $K_v = 100(\text{m}^3/\text{s})/\text{m}$.

L'organe de mesure de la température est un capteur de gain $K_c = 5.10^{-2}\text{V}/^\circ\text{C}$.

1. Représenter le schéma blocs de la chaîne directe du procédé ;
2. Un régulateur proportionnel K est implanté pour commander la température de l'enceinte par action sur la tension $u(t)$. Représenter le schéma blocs de l'asservissement ;
3. Ecrire la fonction de transfert en boucle ouverte ;
4. Pourquoi cette fonction de transfert peut-elle se simplifier ?
5. Faire une analyse de la stabilité de l'asservissement par le critère algébrique de Routh.
Retrouver analytiquement ce résultat à partir du module et de l'argument de la fonction de transfert en boucle ouverte ;
6. Le lieu de transfert de la boucle ouverte pour $K = 8$ représenté dans le plan de Bode est donné figure 2.2. Retrouver le résultat de la question précédente dans ce plan.
7. Pour quelle(s) raison(s), dans le cas d'une correction proportionnelle, l'erreur de position de l'asservissement est-elle nulle ?
8. Dessiner le comportement indicial de l'asservissement pour $K = 0.08$.

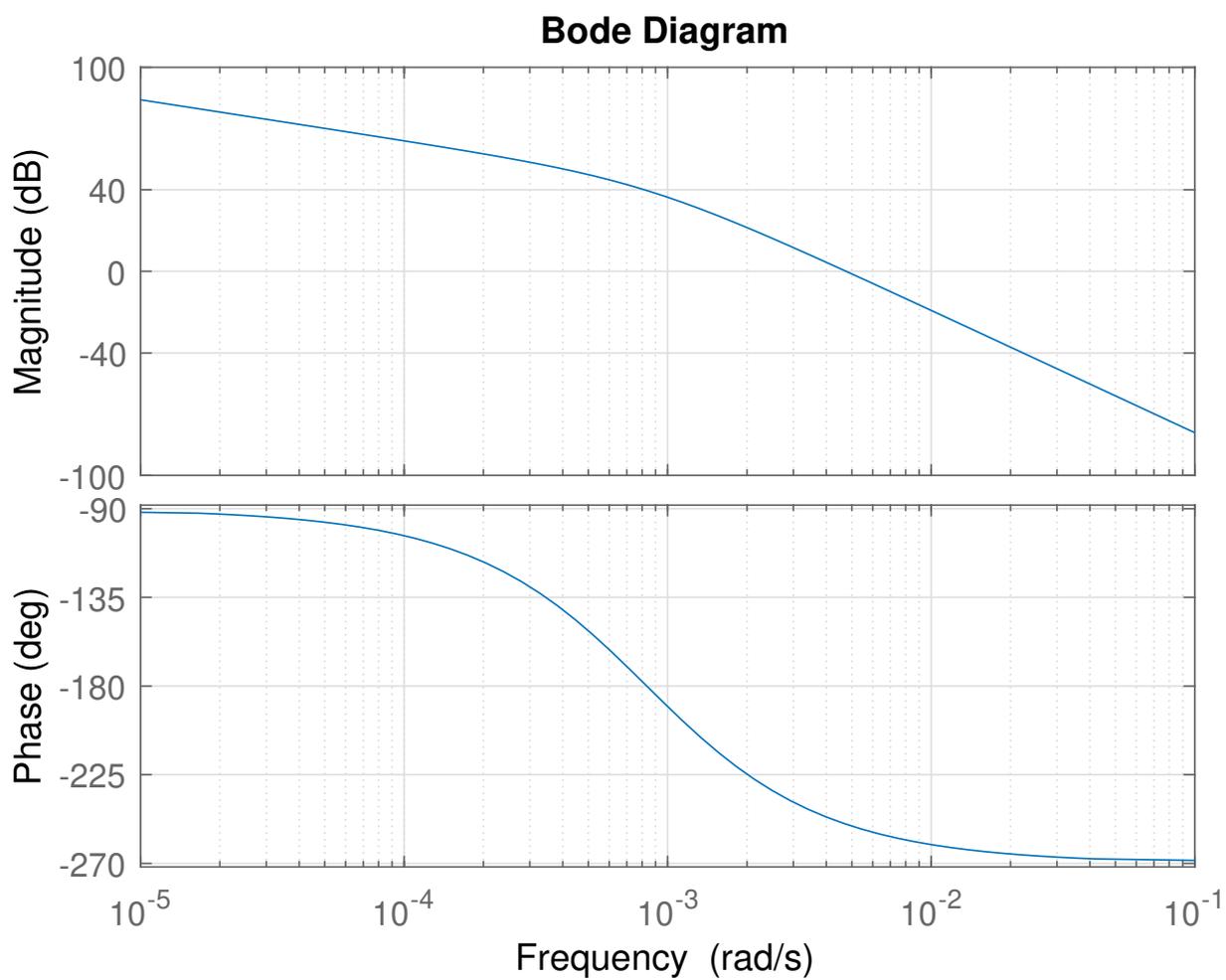


FIGURE 2.2 – Boucle ouverte avec un correcteur proportionnel de gain $K = 8$

On propose de remplacer le correcteur proportionnel par une correction proportionnelle dérivée (PD) de fonction de transfert :

$$D(p) = K (1 + T_d p)$$

avec $K = 0.08$ et $T_d = 2539$.

9. Quelle est l'influence de ce correcteur sur la précision de l'asservissement ?
10. Le tracé de la réponse harmonique de $D(p)$ a été placé sur le graphique 2.3. Déduire celui de la nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte ;

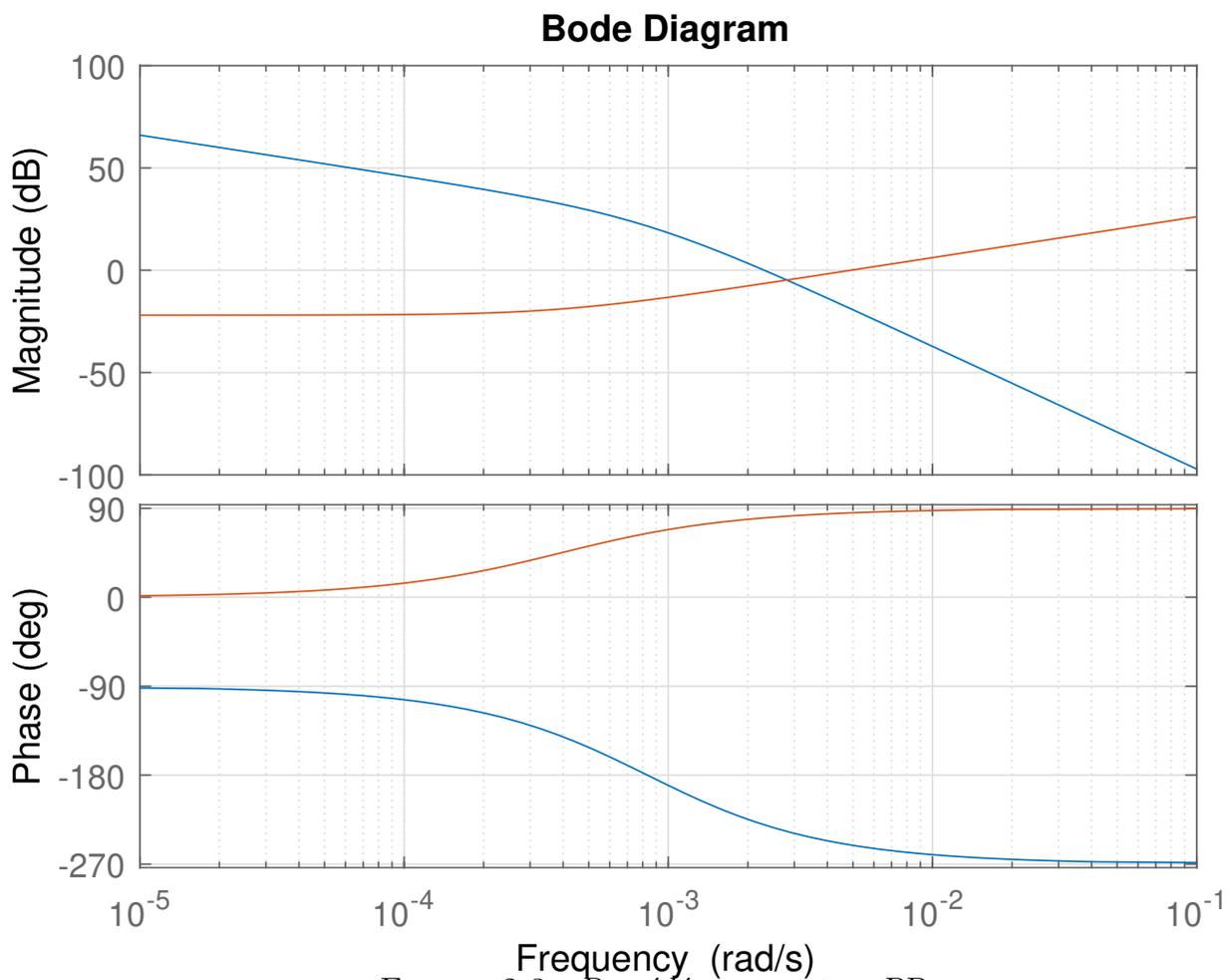


FIGURE 2.3 – Procédé + correcteur PD

11. Faire apparaître la marge de phase du système corrigé et conclure sur l'utilité du correcteur $D(p)$. Pour étayer votre propos la réponse indicielle de l'asservissement corrigé est reportée sur la figure 2.4.

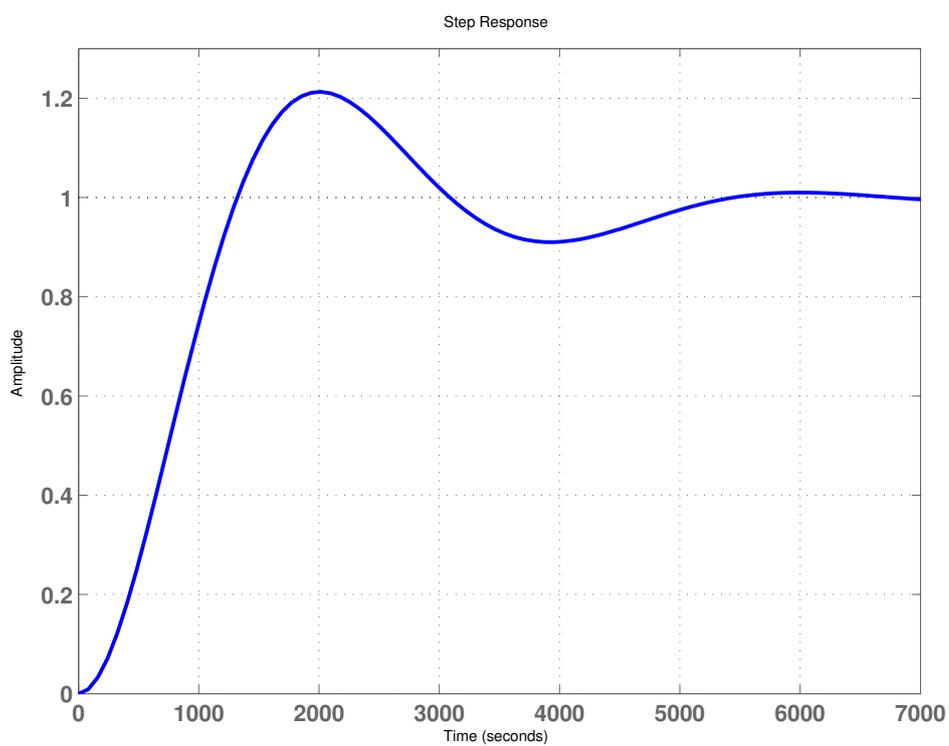


FIGURE 2.4 – Réponse indicielle de l'asservissement corrigé par $D(p)$

Problème n°3

Asservissement de niveau dans un bac – Synthèse de correcteurs PI

On considère le système hydraulique à écoulement libre étudié dans un TD d'ASLC.
On considère ici que le modèle de l'ensemble vanne/bac, linéarisé autour d'un point de fonctionnement choisi, s'écrit :

$$G(p) = \frac{H_s^*(p)}{U^*(p)} = \frac{1.5}{1 + 50p}$$

Le capteur de niveau est supposé parfaitement linéaire et de gain $K_c = 1V/cm$.
La fonction de transfert du correcteur sera notée $D(p)$.

On va étudier le comportement du système asservi en présence de 2 types de correcteurs.

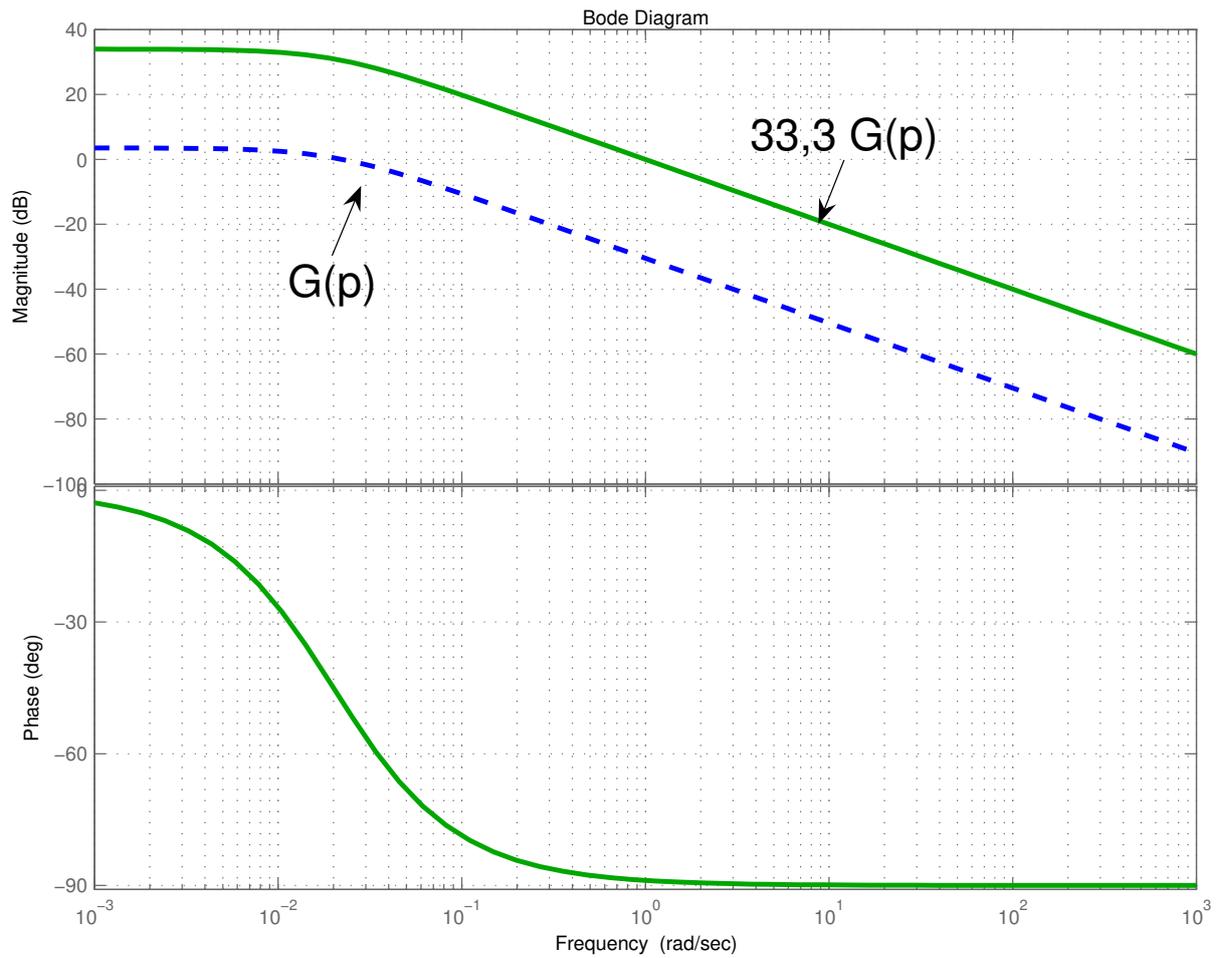
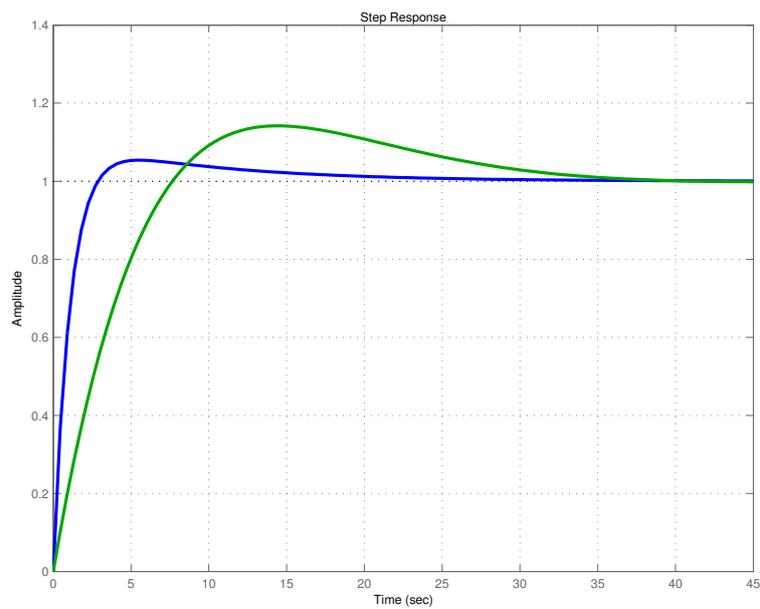
Au fur et à mesure, on complétera le tableau de synthèse fourni à la fin du problème.

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle $D(p) = K$.

1. Dessiner l'asservissement. Donner l'expression des fonctions de transfert $T(p)$ en boucle ouverte et $F(p)$ en boucle fermée.
2. Donner l'expression de l'erreur de position de l'asservissement ?
3. Cet asservissement est-il déstabilisable par action sur K ? On pourra utiliser la réponse harmonique de $G(p)$, figure 3.1.

On remplace la correction proportionnelle par un correcteur de type $D(p) = \frac{K}{T_i p}(1 + T_i p)$
On prendra $K = 33.3$.

4. De quel type est ce correcteur et quel est son intérêt ?
5. La réponse fréquentielle de $G(p)$ est reportée sur la figure 3.1. Proposer un réglage du correcteur $D(p)$
6. Calculer un nouveau correcteur $D(p)$ répondant aux spécifications : temps de réponse $t_r = 20s$ et amortissement $\xi = 0.8$.

FIGURE 3.1 – Réponse fréquentielle de $G(p)$ FIGURE 3.2 – Réponse indicielle de l'asservissement avec $D(p) = \frac{33,3}{10p}(1 + 10p)$ et $D(p) = \frac{9,5}{7,9p}(1 + 7,9p)$

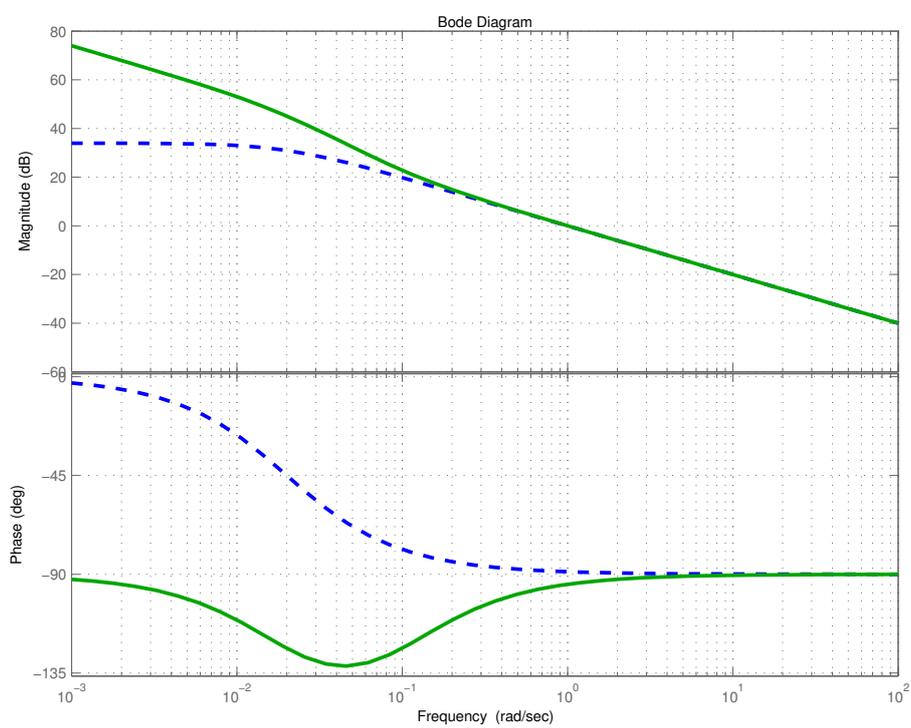


FIGURE 3.3 – Illustration dans Bode du correcteur PI de la question 5

7. Compléter le tableau de synthèse suivant :

	M_φ	M_g	$\varepsilon_p(+\infty)$	$\varepsilon_v(+\infty)$	$D_1\%$	$tr_{5\%}$
$D(p) = 1$						
$D(p) = 33.3$						
$D(p) = 33.3(1 + \frac{1}{10p})$						
$D(p) = 9.5(1 + \frac{1}{7.9p})$						

8. Analyser et commenter le tableau.