# TD AUTOMATIQUE : MODÉLISATION DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS

---

Exercice 1 :

---

<u>1ère partie</u>

On se propose d'étudier le système hydraulique à écoulement libre de la Figure 1. Le réservoir est alimenté à travers une vanne d'entrée à raison d'un débit $Q_e(t)$. Le débit de sortie $Q_s(t)$ est réglé par l'intermédiaire de la vanne de sortie d'ouverture $s$ petite devant la section du réservoir $S$.

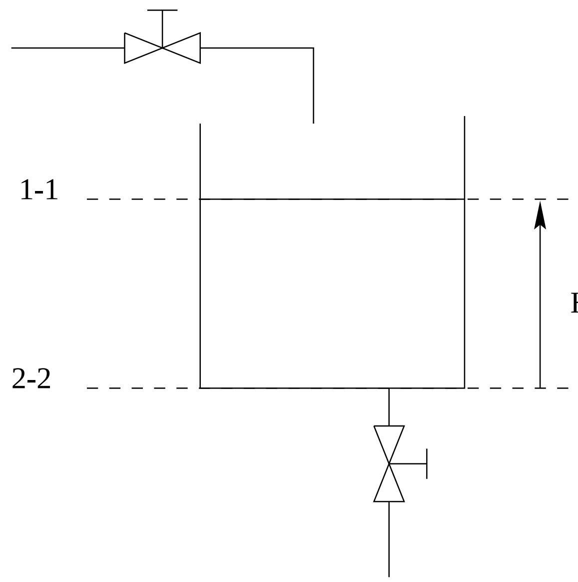



Fig. 1 –

On va s'intéresser à la variation de la hauteur $H(t)$ de liquide en fonction du débit d'entrée $Q_e(t)$.

**1.1)** Donner la condition de stabilisation de la hauteur du liquide en fonction de $Q_e$ et $Q_s$.

**1.2)** En appliquant la relation de Bernouilli (Cf. cours de mécanique des fluides en IFI1) entre les sections 1-1 et 2-2, calculer l'expression du débit $Q_s$ en fonction de $s$ et $H$.

**1.3)** Etablir la relation qui décrit la variation de niveau $dH$ pendant un temps $dt$ en fonction de $Q_e$ et $Q_s$. En utilisant les résultats de la question 1.2), donner l'équation différentielle liant la hauteur $H(t)$ (considérée comme la grandeur de sortie) et le débit d'entrée $Q_e(t)$ (grandeur d'entrée).

L'équation obtenue n'étant pas linéaire, on se propose de la linéariser autour d'un état d'équilibre correspondant au point de fonctionnement $(H_0, Q_{e0}, Q_{s0})$.

On note :

$$\begin{aligned} H &= H_0 + h^* \\ Q_e &= Q_{e0} + q_e^* \end{aligned}$$

**1.4)** Ecrire l'équation différentielle liant les variations de niveau $h^*(t)$ aux variations de débit d'entrée $q_e^*(t)$ dans l'hypothèse de petites variations ($h^* \ll H_0$).

**1.5)** En notant $H^*(p) = \mathcal{L}[h^*(t)]$ et $Q_e^*(p) = \mathcal{L}[q_e^*(t)]$, calculer la fonction de transfert $\dfrac{H^*(p)}{Q_e^*(p)}$. Montrer qu'elle correspond à un système du 1er ordre dont on identifiera les deux paramètres caractéristiques. Vérifier l'homogénéité des unités.

**1.6)** Calculer la pente au point de fonctionnement $(H_0, Q_{e0})$ et montrer qu'elle est égale au gain statique $K$ du système linéarisé.

<u>2ème partie</u>

On remplace maintenant la vanne de sortie par une pompe d'extraction qui assure un débit de sortie constant ne dépendant plus de la hauteur de liquide $H$.

**1.7)** En repartant de l'équation établie à la question 1.3) et en supposant une variation de débit $q_e^*$ autour d'un point d'équilibre $Q_{e0}$, établir la relation donnant $H(t)$.

**1.8)** Ce système est-il autorégulant ?

# TD AUTOMATIQUE : ANALYSE DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS

---

Exercice 1 :

---

On désire produire une solution de concentration $C$ fixée. Pour cela, on dispose d'un bac alimenté par la solution diluée (à 1 g/l) que l'on concentre à l'aide d'un débit $Q$ de produit pur.
Une analyse fréquentielle du procédé a fourni les informations suivantes.

En réponse à un débit $Q$ variant comme :

$$Q = 50 + 5\sin(2\pi f t) \quad \text{(l/h)}$$

l'évolution de la concentration $C$ au cours du temps a été :

$$C = 40 + b\sin(2\pi f t + \varphi) \quad \text{(g/l)}$$

Pour différentes valeurs de la fréquence $f$, on a obtenu les résultats regroupés dans le Tableau 1.

**1.1)** En déduire la fonction de transfert $H(p)$ reliant les fluctuations de la sortie (C) à celles de l'entrée (Q).

| $f$ (cycles/h) | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$ (g/l) | 3.8 | 3.4 | 2.9 | 2.5 | 1.85 | 0.65 |
| $\varphi$ (degrés) | -17.5 | -32.15 | -43.3 | -51.5 | -62.05 | -81 |

TAB. 1 – *Résultats de l'analyse fréquentielle*

Exercice 2 :

On considère un réacteur parfaitement agité dans lequel s'effectue la réaction $A \longrightarrow B$. On désigne par $Q$ le débit d'alimentation du réacteur et par $C_A$ la concentration du produit A en sortie du réacteur.
Une étude de la réponse du système à un échelon sur le débit d'entrée a fourni la courbe donnée en Figure 1.

**2.1)** A l'aide de cette courbe, déterminer la fonction de transfert qui relie les fluctuations de la concentration $C_A$ à celles du débit $Q$.

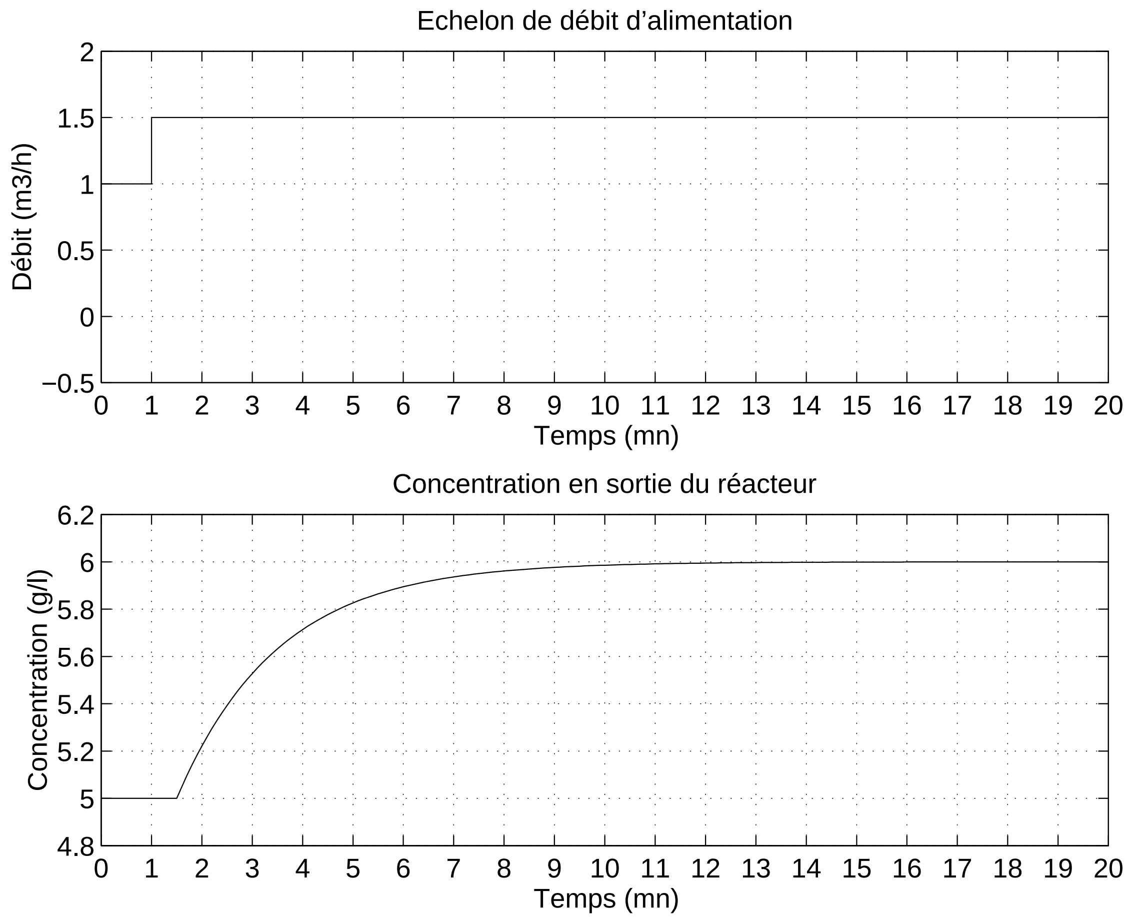



FIG. 1 – *Variations de la concentration $C_A$ en sortie du réacteur en réponse à un échelon du débit d'alimentation $Q$*

Exercice 3 :

La courbe de la Figure 2 représente la réponse d'un système du 2ème ordre à un échelon unitaire.

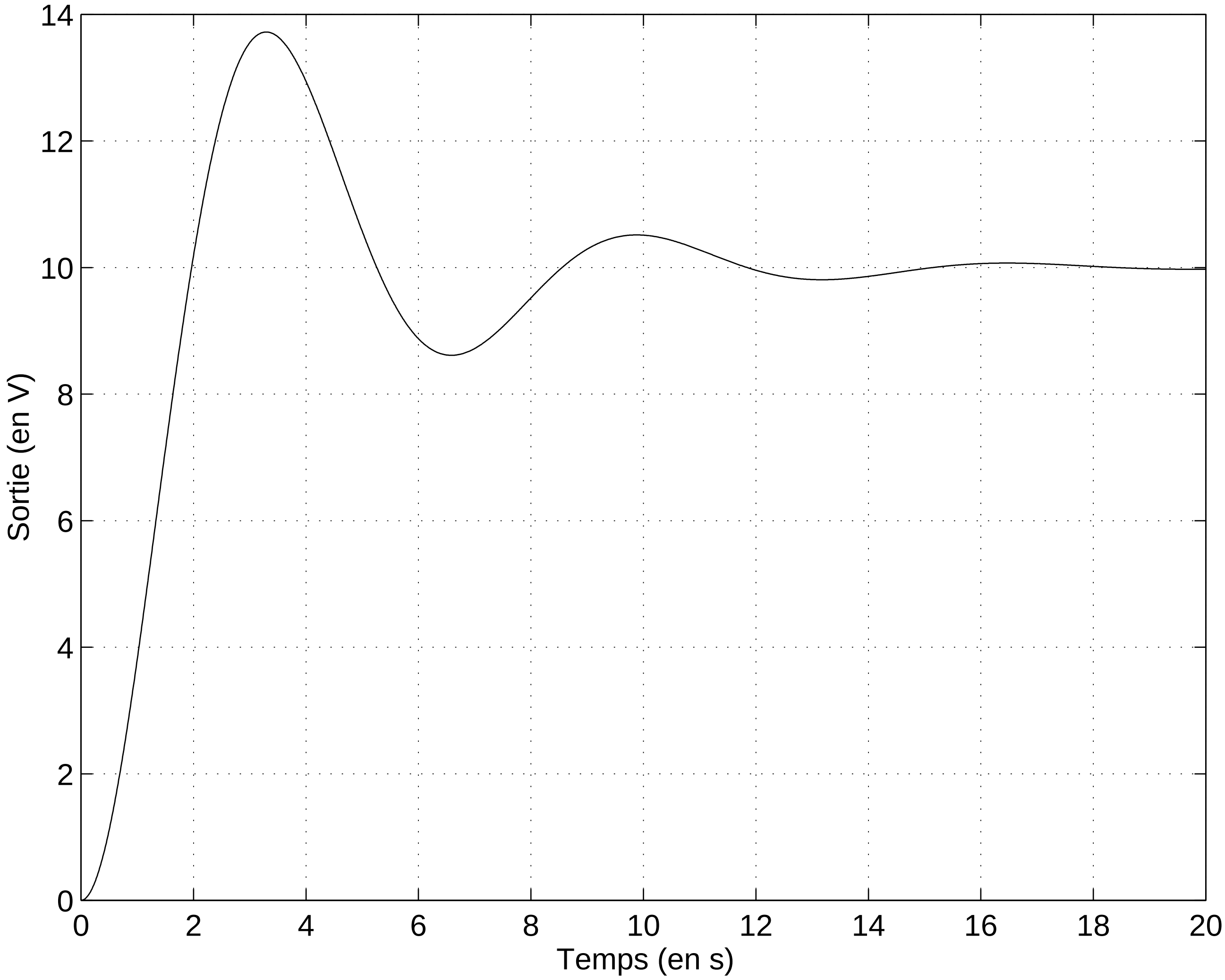



FIG. 2 – Réponse du système

**3.1)** Déduire de cette courbe les paramètres du système.

**3.2)** On applique à l'entrée du système un signal sinusoïdal d'amplitude 2V et de fréquence 1Hz.
Calculer l'amplitude et le déphasage du signal en sortie du système, en régime permanent. Commentaire.

Exercice 4 :

Les figures 3 à 12 représentent les diagrammes de Bode ou de Black-Nichols des systèmes listés dans le tableau 2.

| Système | Numéros de figure (plusieurs réponses possibles) |
| --- | --- |
| $\dfrac{K}{1+\tau p}$ | |
| $\dfrac{K}{p(1+\tau p)}$ | |
| $\dfrac{K}{1+2\,\xi\frac{p}{w_n}+\frac{p^2}{w_n^2}}$ sans résonance | |
| $\dfrac{K}{1+2\,\xi\frac{p}{w_n}+\frac{p^2}{w_n^2}}$ avec résonance | |
| $\dfrac{K}{p(1+2\,\xi\frac{p}{w_n}+\frac{p^2}{w_n^2})}$ | |

Tab. 2 – Systèmes

**4.1)** Compléter le tableau 2 en associant chacun des systèmes au diagramme qui lui correspond.

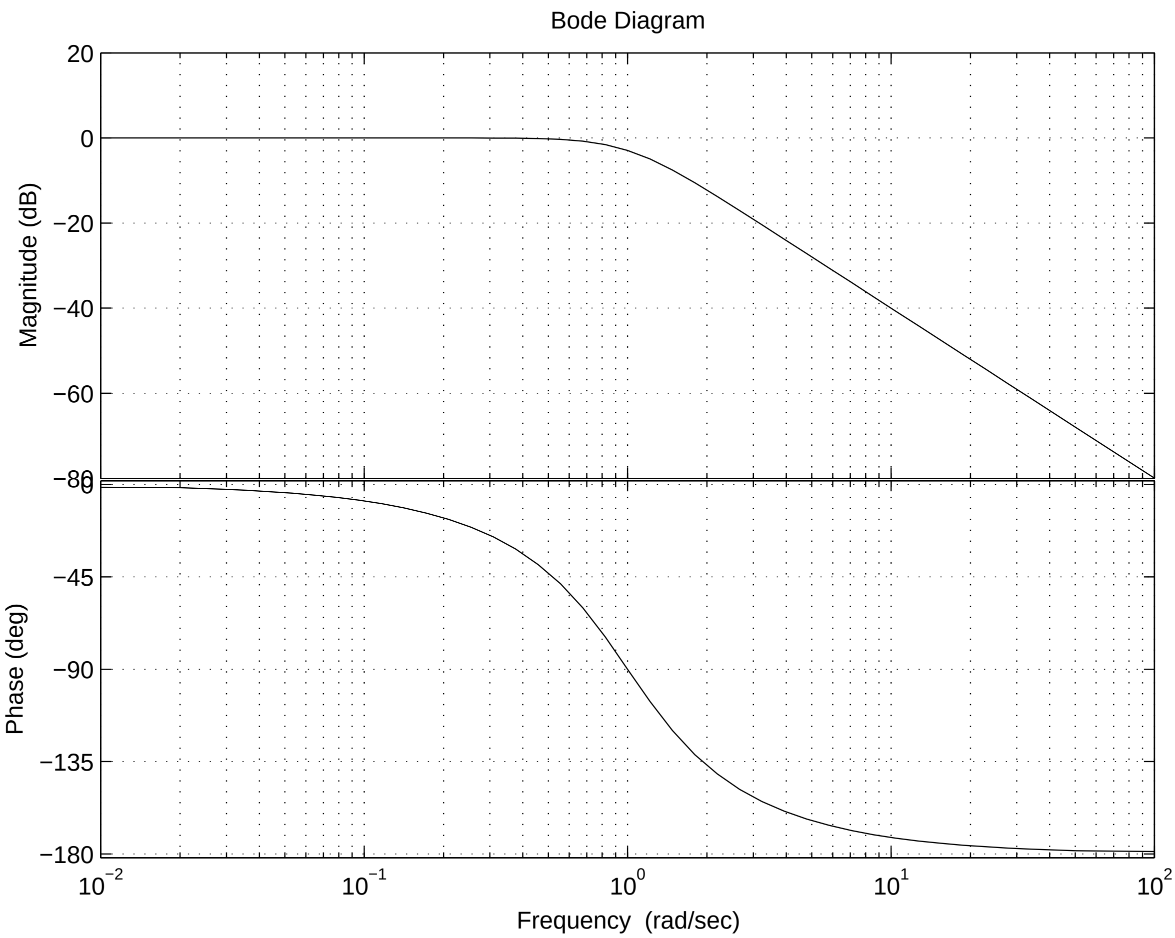
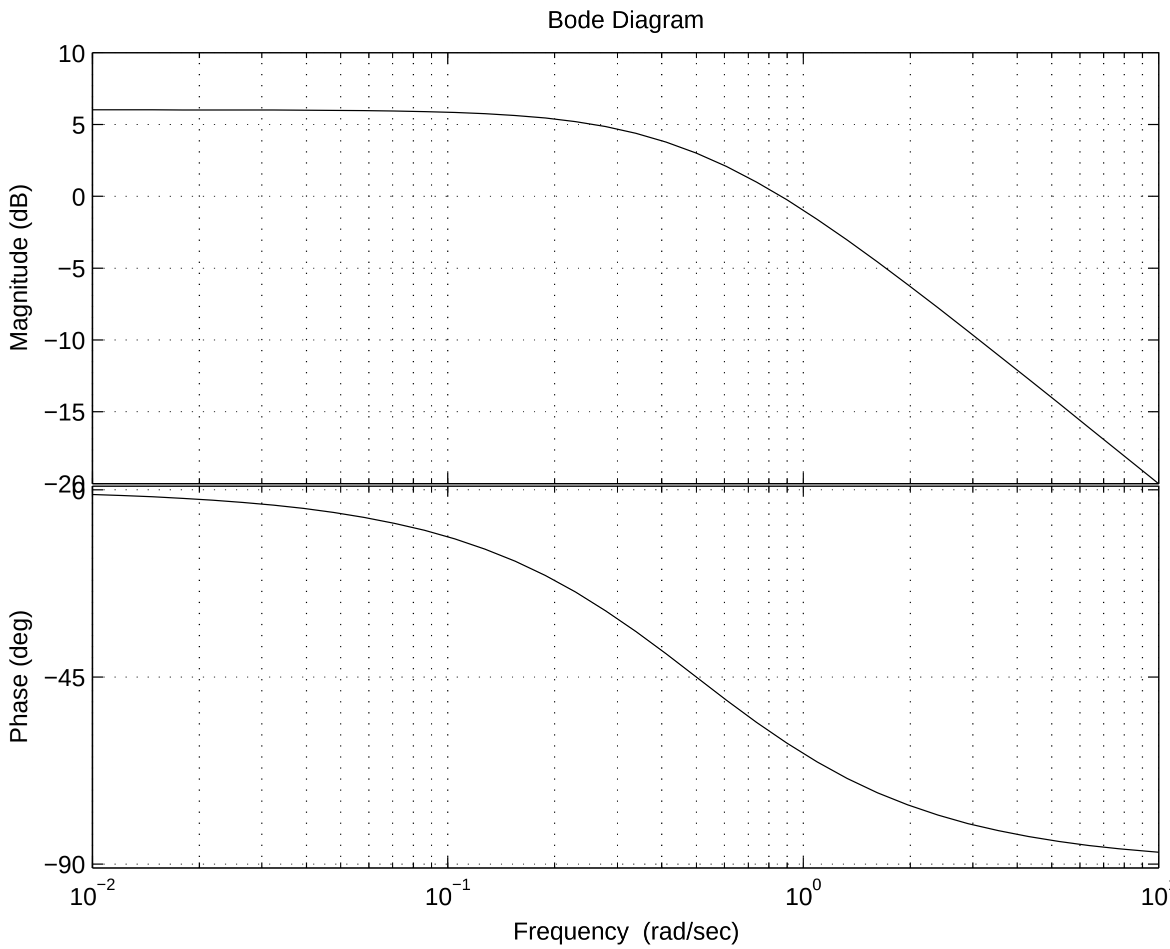
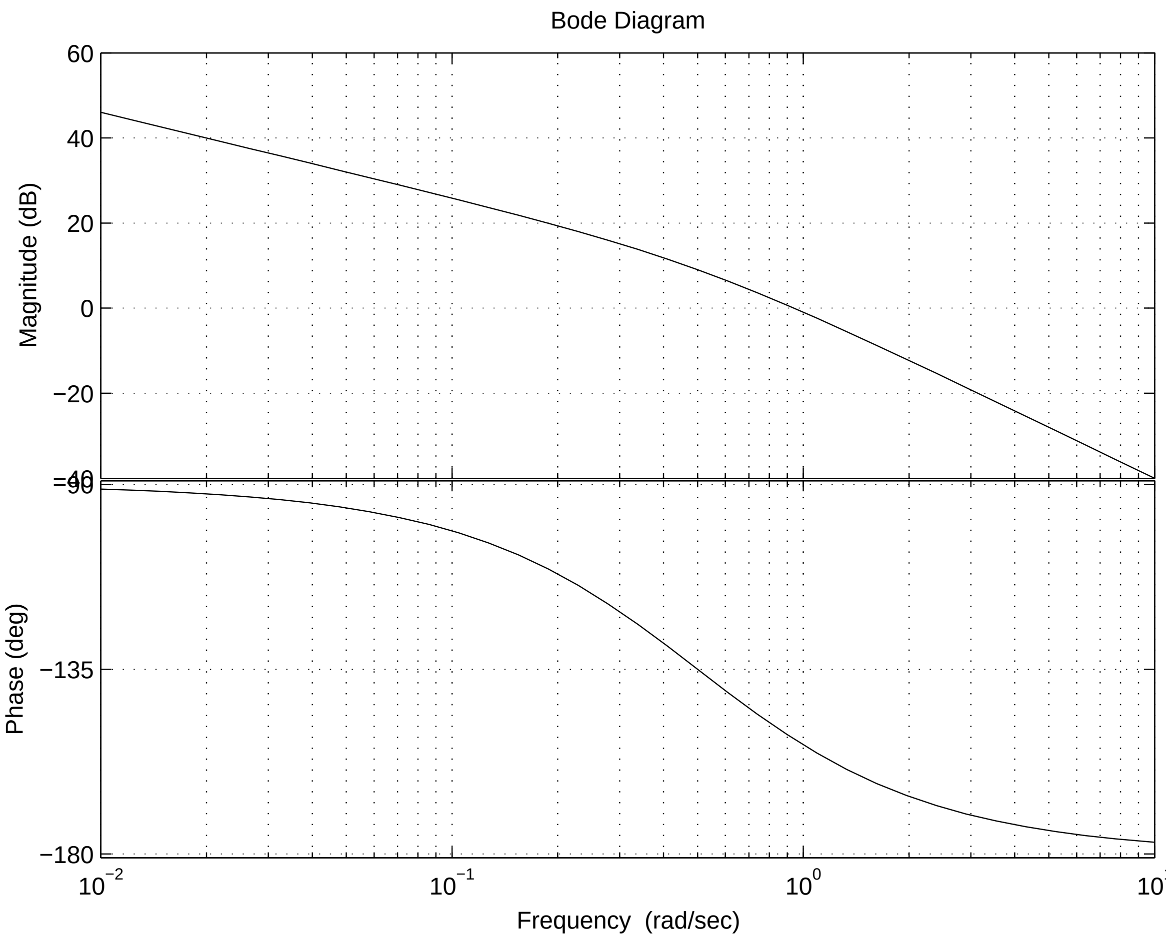

Bode Diagram
20
0
−20
−40
−60
−80
Magnitude (dB)
0
−45
−90
−135
−180
Phase (deg)
$10^{-2}$
$10^{-1}$
$10^{0}$
$10^{1}$
$10^{2}$
Frequency (rad/sec)

Fig. 3 –



Bode Diagram
10
5
0
−5
−10
−15
−20
Magnitude (dB)
0
−45
−90
Phase (deg)
$10^{-2}$
$10^{-1}$
$10^{0}$
$10^{1}$
Frequency (rad/sec)


FIG. 4 –



Bode Diagram
60
40
20
0
−20
−40
Magnitude (dB)
−90
−135
−180
Phase (deg)
$10^{-2}$
$10^{-1}$
$10^{0}$
$10^{1}$
Frequency (rad/sec)


FIG. 5 –

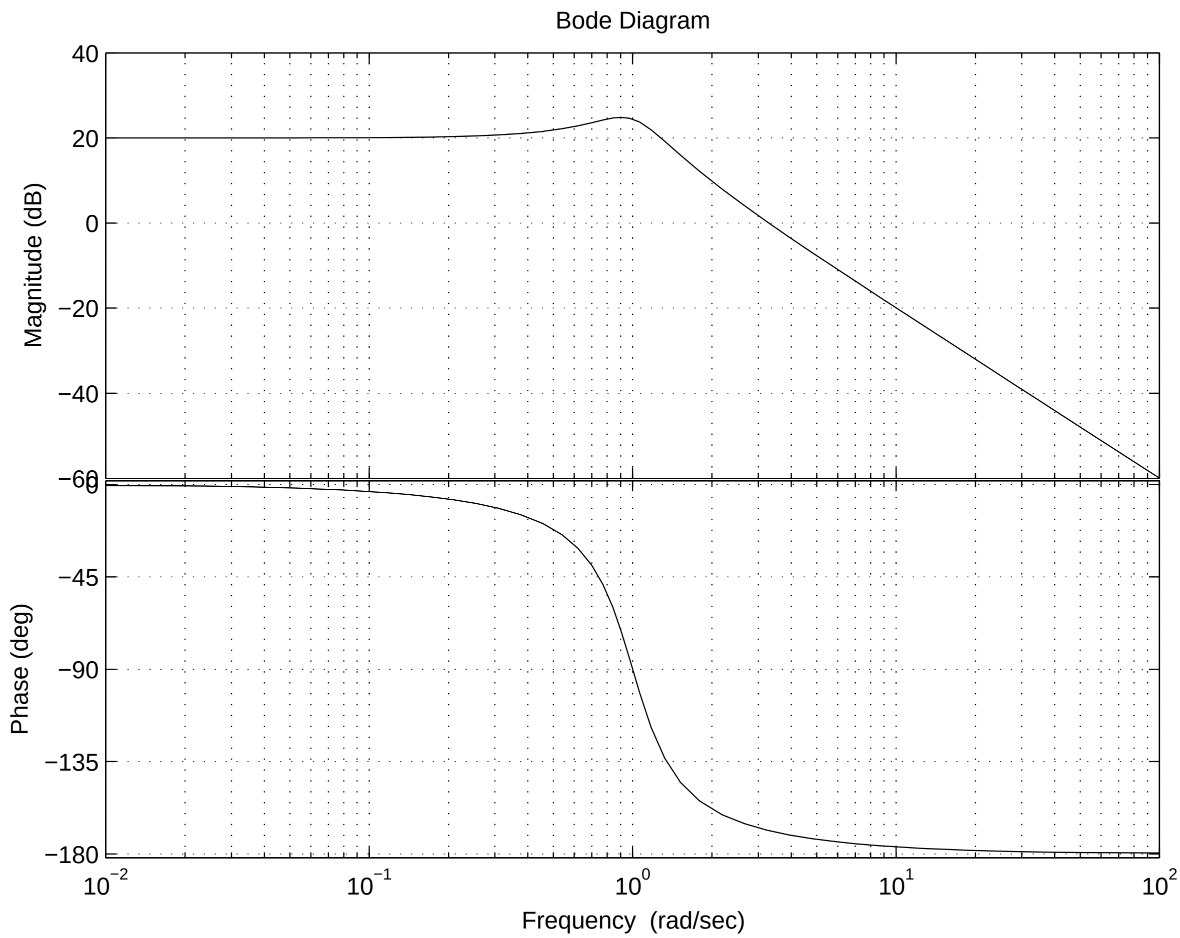

Bode Diagram
40
20
0
−20
−40
−60
Magnitude (dB)
0
−45
−90
−135
−180
Phase (deg)
$10^{-2}$
$10^{-1}$
$10^{0}$
$10^{1}$
$10^{2}$
Frequency (rad/sec)

FIG. 6 –

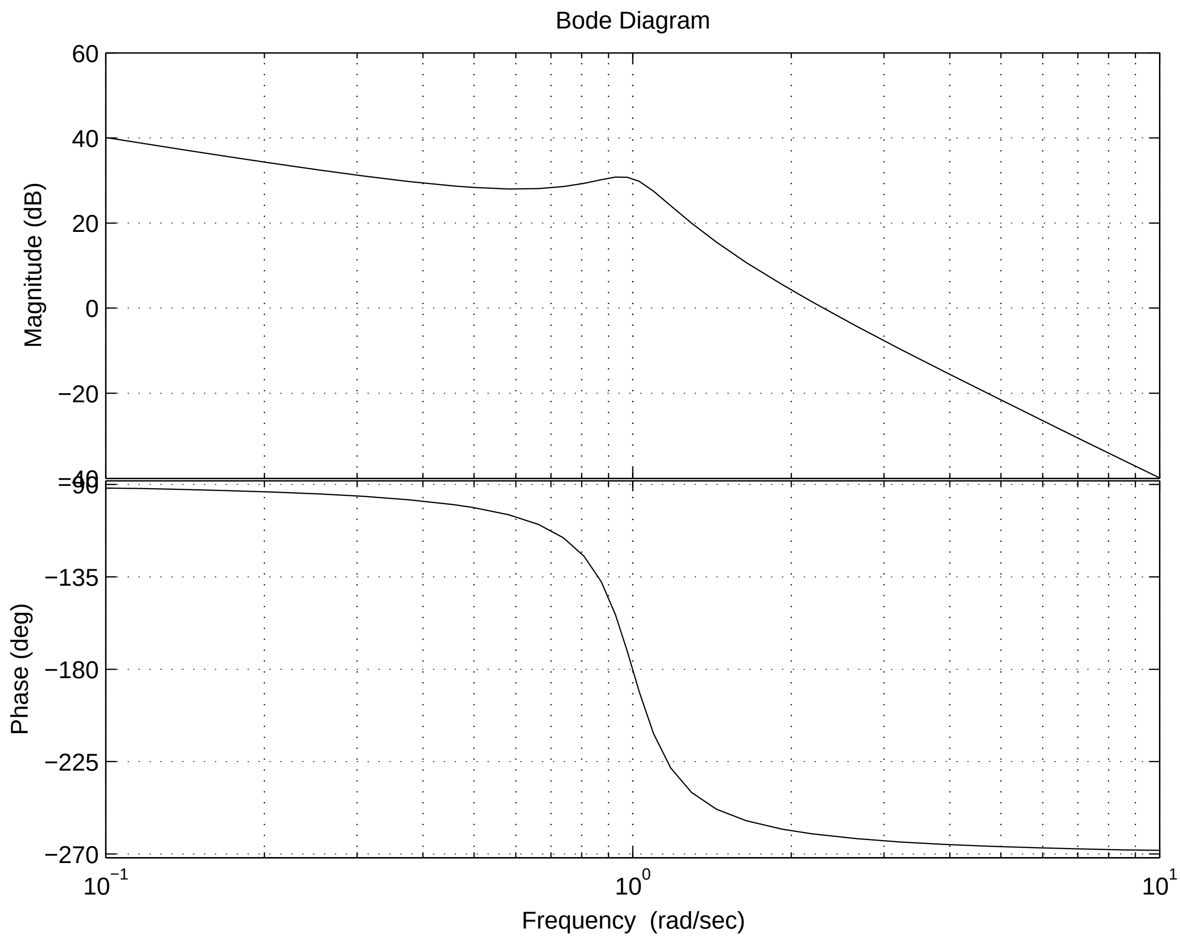

Bode Diagram
60
40
20
0
−20
−40
Magnitude (dB)
−90
−135
−180
−225
−270
Phase (deg)
$10^{-1}$
$10^{0}$
$10^{1}$
Frequency (rad/sec)

FIG. 7 –

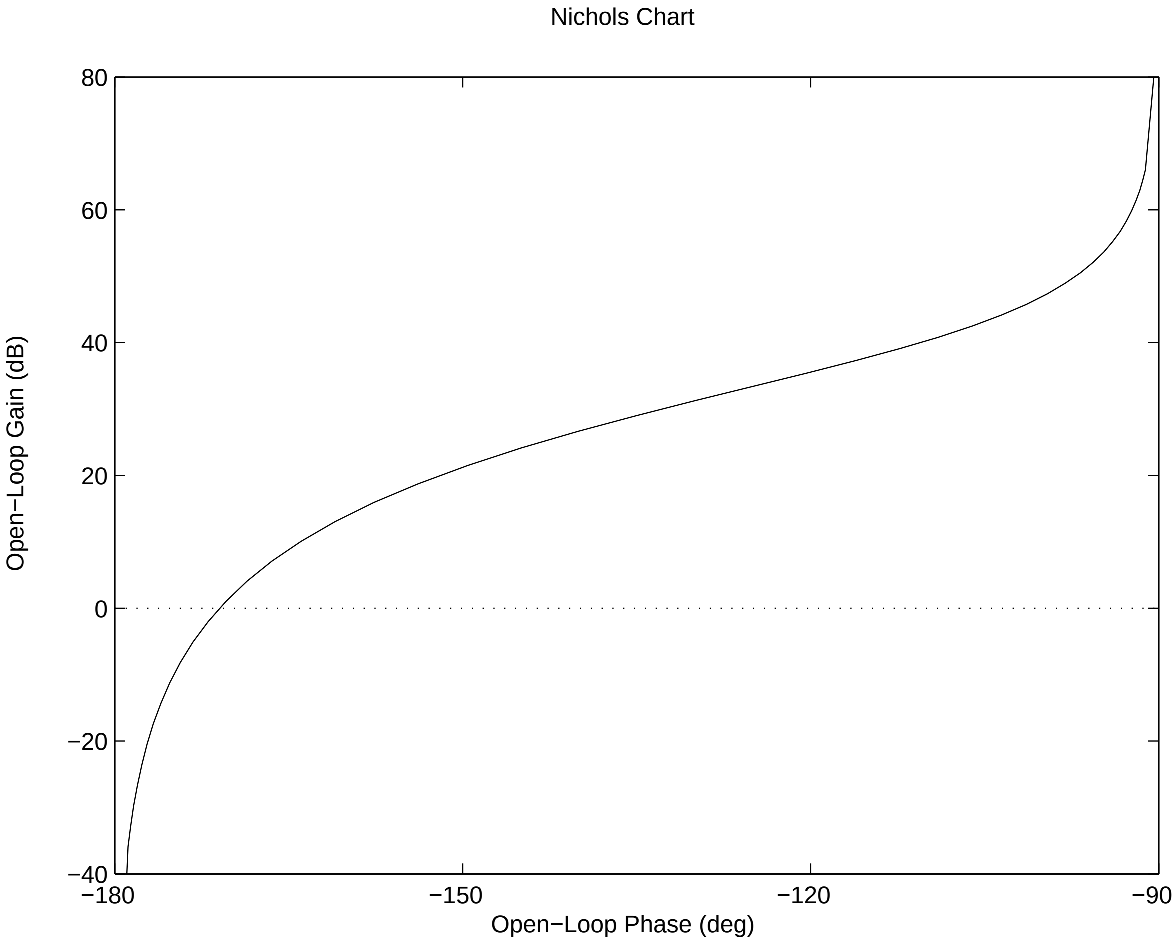

Nichols Chart
80
60
40
20
0
−20
−40
Open−Loop Gain (dB)
−180
−150
−120
−90
Open−Loop Phase (deg)

Fig. 8 –

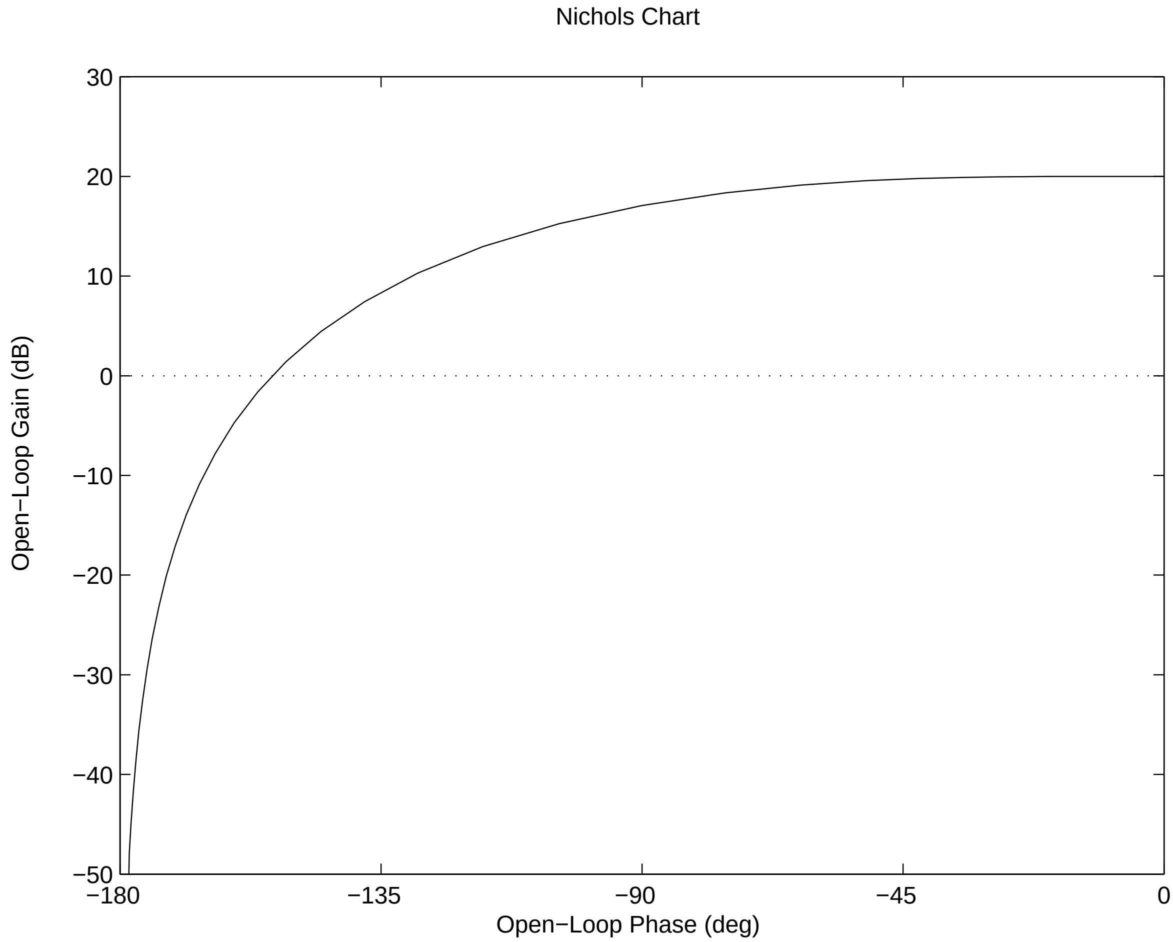

Nichols Chart
Open−Loop Gain (dB)
Open−Loop Phase (deg)
30
20
10
0
−10
−20
−30
−40
−50
−180
−135
−90
−45
0

FIG. 9 –

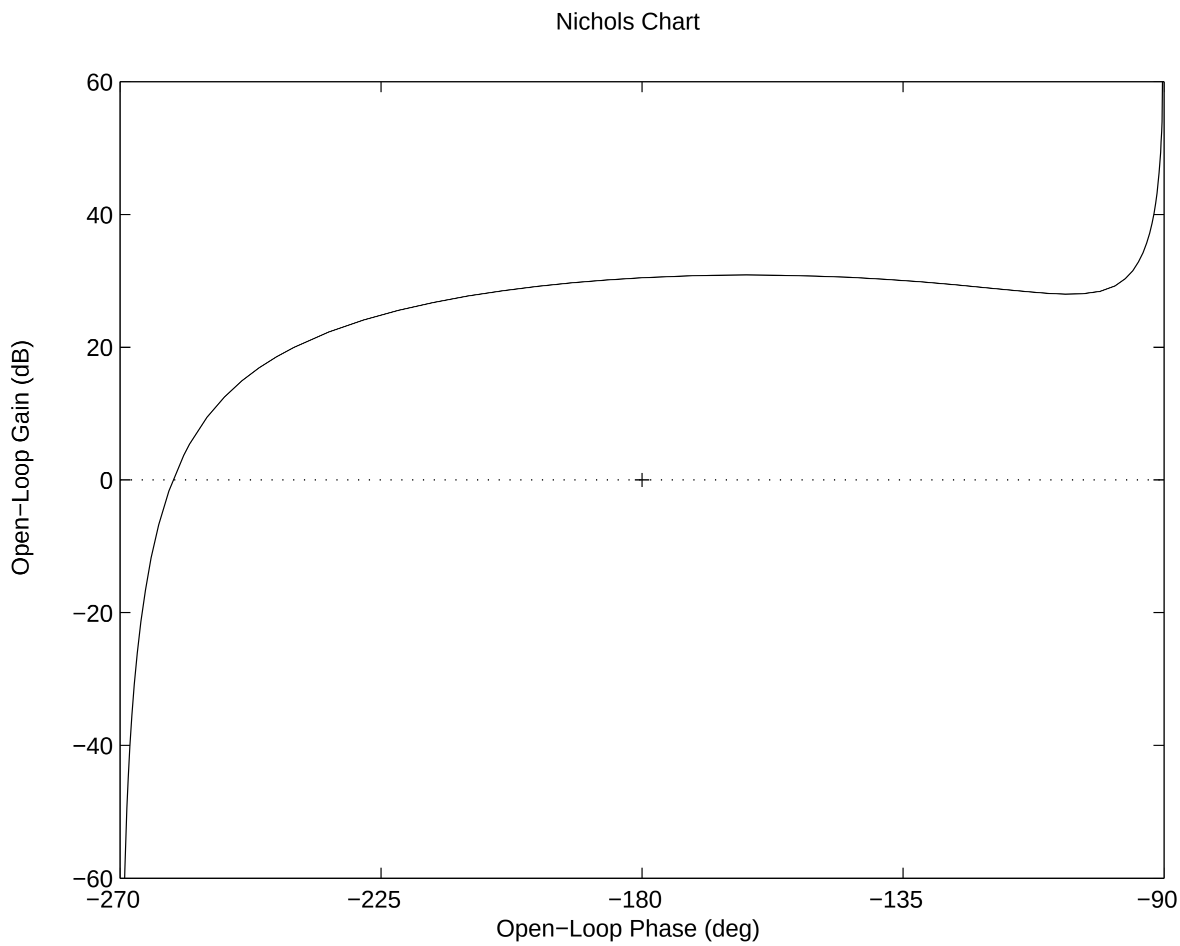

Nichols Chart
60
40
20
0
−20
−40
−60
−270
−225
−180
−135
−90
Open−Loop Gain (dB)
Open−Loop Phase (deg)

Fig. 10 –

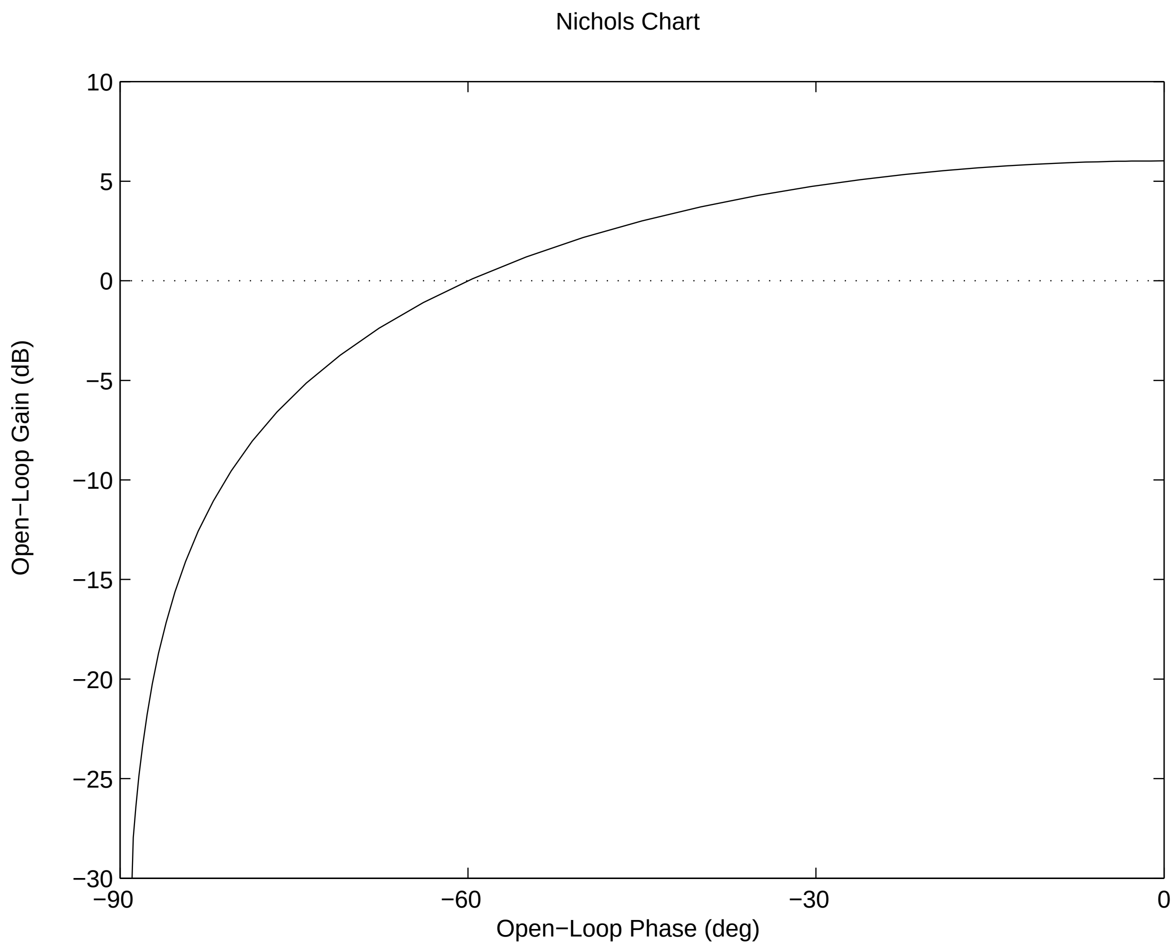

Nichols Chart
10
5
0
−5
−10
−15
−20
−25
−30
−90
−60
−30
0
Open−Loop Gain (dB)
Open−Loop Phase (deg)

FIG. 11 –

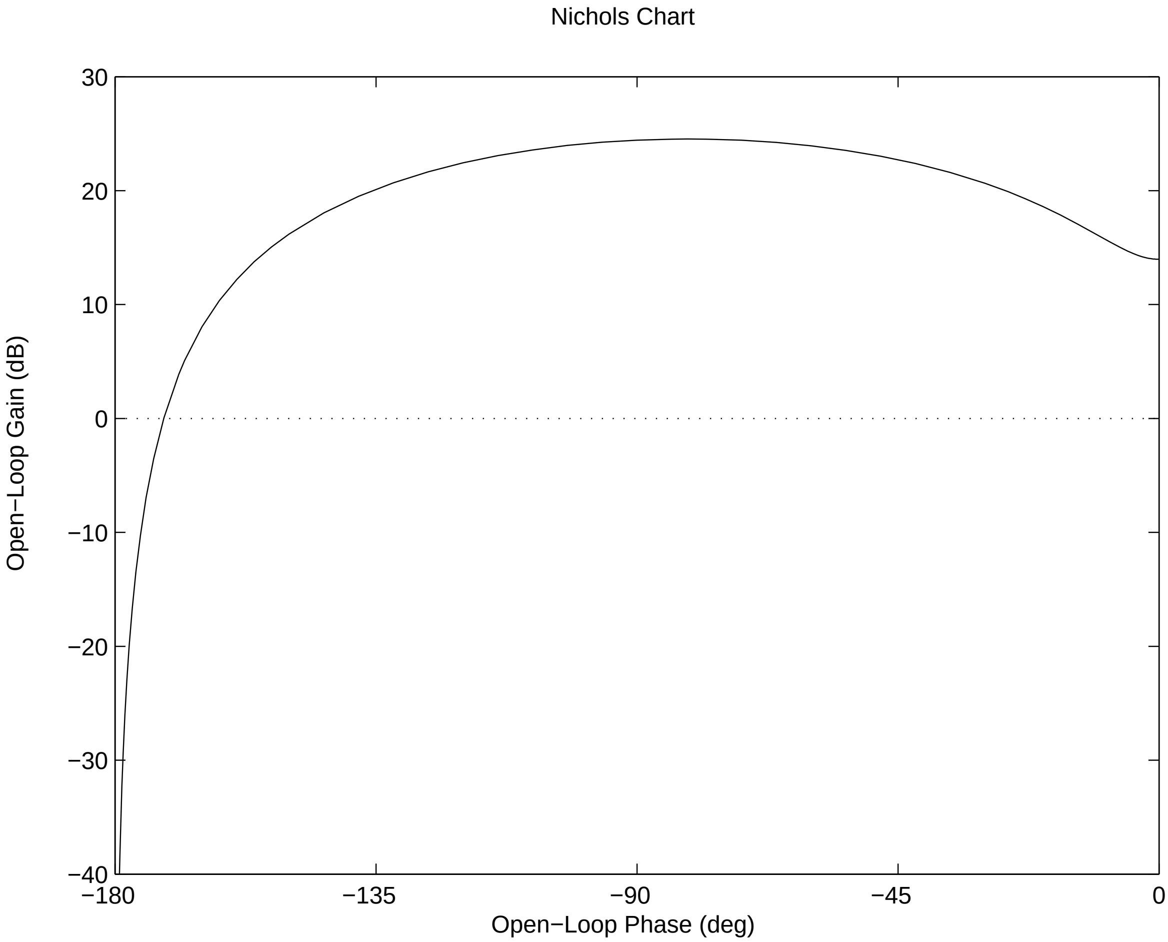

Nichols Chart
30
20
10
0
−10
−20
−30
−40
−180
−135
−90
−45
0
Open−Loop Gain (dB)
Open−Loop Phase (deg)

FIG. 12 –

# TD AUTOMATIQUE : ANALYSE DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS

## Exercice 5 :

On considère un système du 2ème ordre.

Les mesures suivantes ont été faites :

- en fréquentiel : à la fréquence de 100 Hz, on a relevé un gain de $-10$ dB et un déphasage entrée/sortie de $-90°$
- en temporel : la réponse à un échelon unité présente un 1er dépassement relatif de 85%

**5.1)** Déduire de ces expériences les paramètres $K$, $\xi$ et $w_n$ du système.

**5.2)** Si on excite ce système par un signal sinusoïdal d'amplitude 5 et de fréquence 100 Hz, quelle sera l'amplitude du signal de sortie en régime permanent ? (expliquer)

## Exercice 6 :

On considère la réponse à un échelon unité de la figure 1.

Cette réponse correspond à un des 4 systèmes suivants :

| $M_1(p)$ | $M_2(p)$ | $M_3(p)$ | $M_4(p)$ |
|---|---|---|---|
| $\dfrac{-0.7813}{p^2+p+0.3906}$ | $\dfrac{-19.5312}{p^2+5\,p+9.7656}$ | $\dfrac{-3.125}{p^2+p+1.5625}$ | $\dfrac{1.5626}{p^2+p+0.3906}$ |

**6.1)** Identifier le système qui a produit la réponse de la figure 1.
Pour chacun des 4 systèmes, expliquer pourquoi vous choisissez ou rejetez le système.

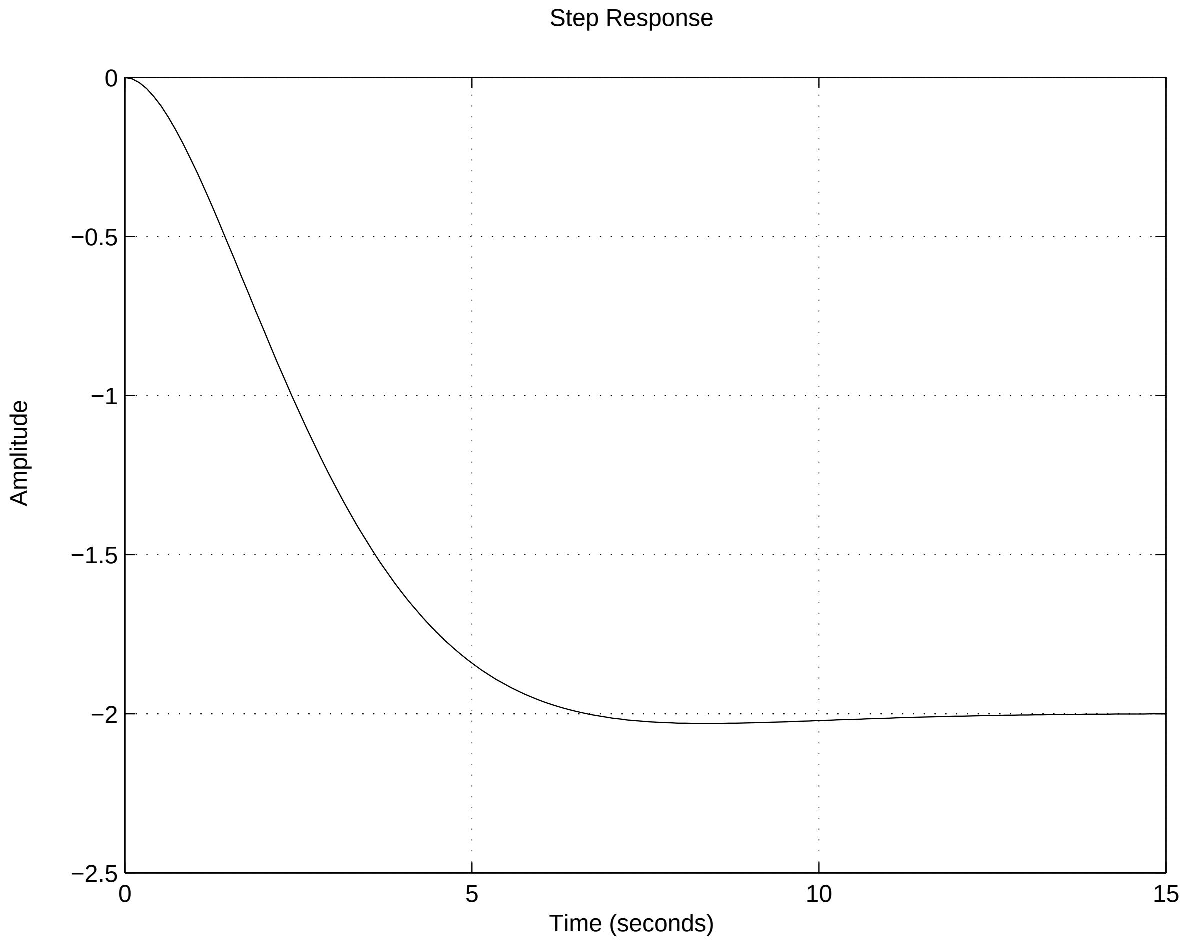



FIG. 1 – [EXERCICE 6] : réponse du système à reconnaître

---

Exercice 7 :

---

On considère un système dont le diagramme de Bode est fourni sur la figure 2.

On applique en entrée un signal sinusoïdal de fréquence $f$ (en Hz) et d'amplitude 10 V et, en régime permanent, on mesure une sortie sinusoïdale d'amplitude $V_s$ (en V).

**7.1)** Compléter le tableau suivant :

| $f$ (Hz) | 1 | 9.5 | |
|---|---|---|---|
| $V_s$ (V) | | | 10 |

**7.2)** Quel est l'ordre du système ?

Chaque réponse devra être justifiée.

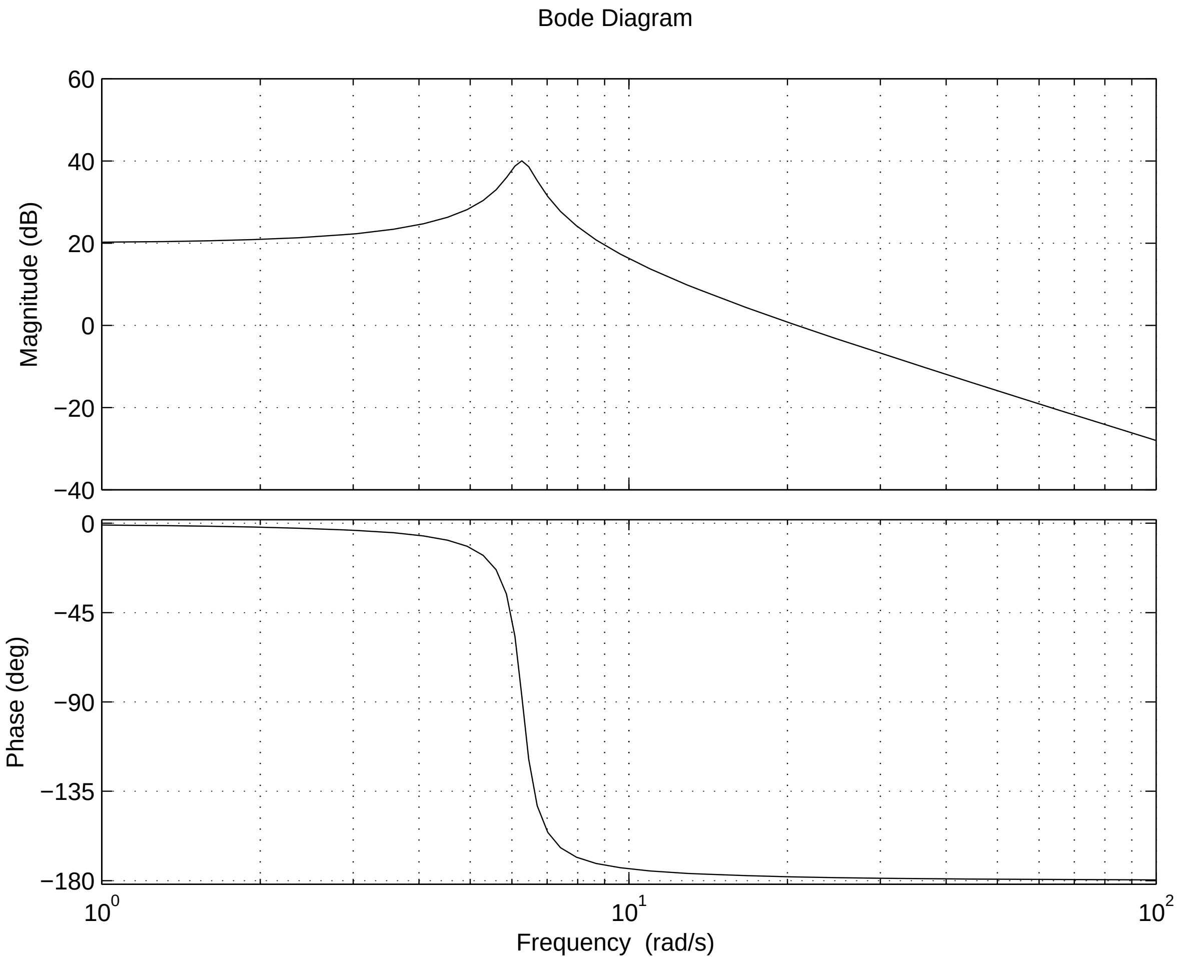



FIG. 2 – [EXERCICE 7] : diagramme de Bode

---

Exercice 8

---

On cherche à identifier les paramètres $(K, \xi, w_n)$ d'un système du second ordre.

On applique à l'entrée du système un signal sinusoïdal de fréquence variable et on mesure le signal de sortie, ce qui conduit au diagramme de Bode de la figure 3.

**8.1)** En déduire les paramètres recherchés.

**8.2)** Pour un signal d'entrée d'amplitude 10, on mesure un signal de sortie de même amplitude. Quelle est la fréquence du signal appliqué à l'entrée ?

**8.3)** Le système étant au repos, on fait varier son entrée sous forme d'un échelon de position d'amplitude 5. Quelle sera la valeur atteinte par la sortie en régime permanent ? Quelle sera la valeur maximum atteinte par la sortie avant de se stabiliser (i.e. avant d'atteindre le régime permanent) ?

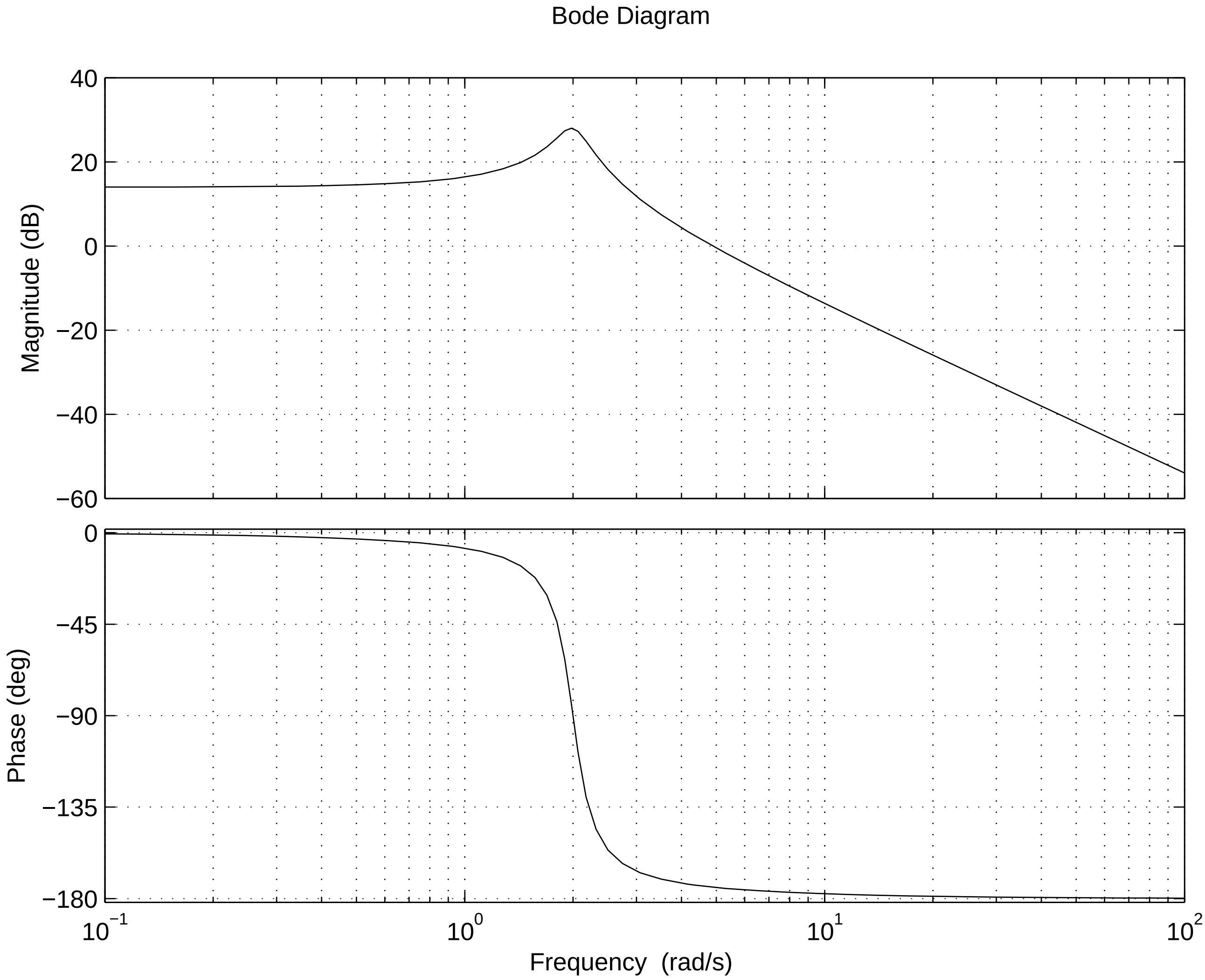



FIG. 3 – [EXERCICE 8] : diagramme de Bode