M1 – U.E. CSy
Examen Ecrit du Module P2

Décembre 2014 – Durée 2h – Documents autorisés

Le sujet comprend quatre exercices pouvant être traités indépendamment les uns des autres.

Exercice I – Fonctions de transfert et performances en précision d'un asservissement [5 points]

On considère l'asservissement représenté sur la figure 1 pour lequel $G(p) = \frac{1}{p(p+3)}$ et $K_c = 2$; le gain K de correction proportionnelle est variable.

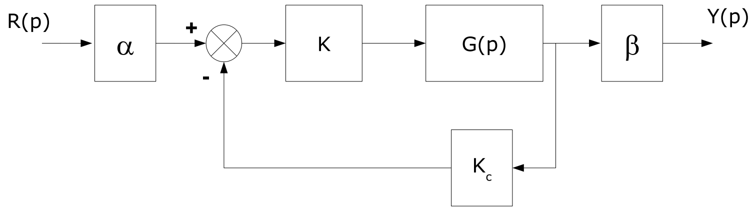

FIGURE 1 – Asservissement de l'exercice I

1. Donner l'expression de la fonction de transfert $T(p)$ en boucle ouverte.
2. Donner l'expression de la fonction de transfert $F(p) = \frac{Y(p)}{R(p)}$ en boucle fermée.
   La mettre sous forme canonique.
3. Donner l'expression de l'erreur de l'asservissement $\varepsilon(p) = R(p) - Y(p)$.
4. Quelle condition doivent remplir les paramètres α et β pour que l'erreur de position soit nulle ?
5. Pour $\alpha = 4$ et $\beta = 0.5$, calculer l'erreur de vitesse (de traînage) de l'asservissement ; pour cela, on considèrera une rampe unitaire de transformée de Laplace $R(p) = \frac{1}{p^2}$.
6. Que devient l'erreur de vitesse pour $\alpha = 4$ et $\beta = 0.6$?

Exercice II – Analyse d'un asservissement dans le lieu des racines [7 points]

On considère l'asservissement représenté sur la figure 2 pour lequel $G(p) = \frac{32}{(p+1)^2(p+4)^2}$; le gain K de correction proportionnelle est variable.

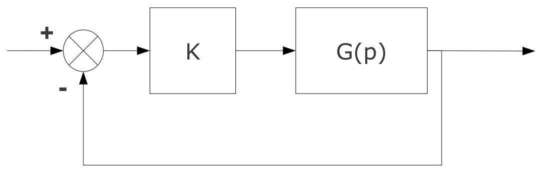

FIGURE 2 – Asservissement de l'exercice II

Le lieu des racines correspondant est reporté sur la figure 3. On rappelle que le lieu des racines (ou lieu d'Evans) représente l'évolution des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée pour K variant de 0 à $+\infty$; les points de départ ($K = 0$) du lieu correspondent aux pôles de la fonction de transfert en boucle ouverte et les points d'arrivée ($K \to \infty$) – dans le cas présent – à quatre directions asymptotiques.

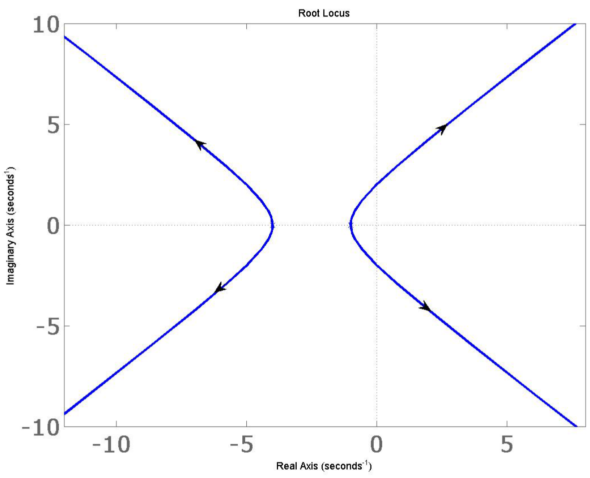

FIGURE 3 – Lieu des racines

Pour quelques valeurs de K, les pôles de l'asservissement sont donnés et reportés dans le tableau ci-dessous * :

$K = 0$	$K = 0.23$	$K = 0.85$	$K = 3.10$	$K = 7.57$
-1	$-4.2 - 0.8j$	$-4.5 - 1.3j$	$-5.0 - 2.0j$	$-5.5 - 2.6j$
-1	$-4.2 + 0.8j$	$-4.5 + 1.3j$	$-5.0 + 2.0j$	$-5.5 + 2.6j$
-4	$-0.8 - 0.8j$	$-0.5 - 1.3j$	$-2.0j$	$0.5 - 2.6j$
-4	$-0.8 + 0.8j$	$-0.5 + 1.3j$	$+2.0j$	$0.5 + 2.6j$

7. A partir du lieu des racines, faire l'analyse de la stabilité de l'asservissement en fonction de K ? Justifier la réponse.

8. Pour quelle raison peut-on dire que l'asservissement se comporte comme un système du second ordre ?

9. Quelle est la condition sur K pour que l'asservissement présente un comportement indiciel (réponse à un échelon) apériodique ?

10. Pour quelle valeur de K appartenant à l'ensemble $\{0.23\,;\, 0.85\,;\, 3.10\,;7.57\}$, l'asservissement présente-t-il le temps de réponse le plus court ? Argumenter la réponse.

Pour la suite de l'exercice (questions 11 à 14), on pose $K = 0.23$.

11. Déduire de la valeur des pôles pour $K = 0.23$ la valeur du coefficient d'amortissement ξ et de la pulsation naturelle ω_n puis des trois caractéristiques dynamiques (temps de réponse, premier dépassement et temps de montée) de l'asservissement.

12. Donner, sans calcul, la valeur de l'erreur de position de l'asservissement.

13. Dessiner l'allure de la réponse indicielle de l'asservissement. Y faire clairement apparaître les résultats des deux questions précédentes.

14. Donner, sans calcul, la valeur de l'erreur de vitesse de l'asservissement.

15. Donner la valeur de l'erreur de position pour $K = 5$.

*. la valeur $K = 0$ n'a aucun intérêt physique ; elle permet simplement de spécifier les points de départ du lieu.

Exercice III – Analyse et synthèse dans le plan de Bode [4 points]

On considère l'asservissement représenté sur la figure 4 pour lequel $G(p) = \frac{32}{(p+1)^2(p+4)^2}$. Le correcteur a pour fonction de transfert $D(p)$.

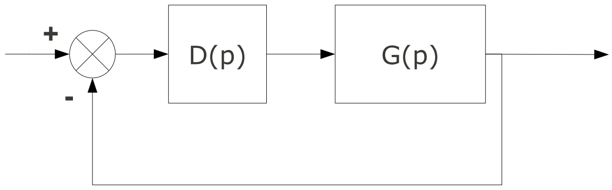

FIGURE 4 – Asservissement de l'exercice III

Dans un premier temps, on considère une correction proportionnelle : $D(p) = K$.

La réponse harmonique de la fonction de transfert en boucle ouverte pour $K = 1$ est reportée sur la figure 5.

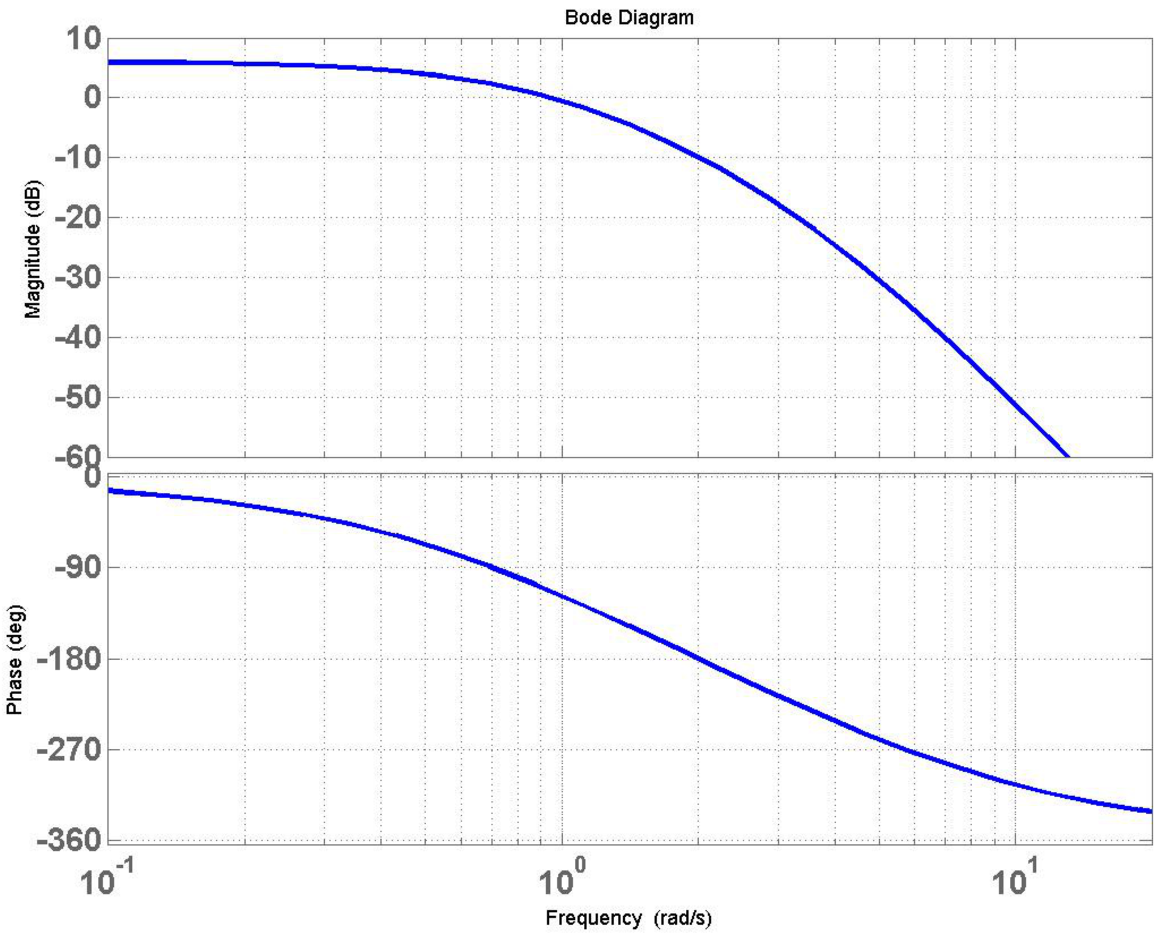

FIGURE 5 – Lieu de transfert en boucle ouverte pour $K = 1$

16. Pour $K = 1$, mesurer les marges de stabilité de l'asservissement (marge de phase et marge de gain).

17. A partir de quelle valeur de K l'asservissement devient-il instable ? Justifier.

On remplace le correcteur proportionnel par $D(p) = \frac{1}{T_i p}(1 + T_i p)$

18. Quel est l'intérêt de ce correcteur ?

19. Quel est le meilleur choix pour le paramètre T_i ? Justifier.

Exercice IV – Placement d'un P.I.D. par la méthode du modèle [6 points]

On considère l'asservissement représenté sur la figure 6 pour lequel $G(p) = \frac{32}{(p+1)^2(p+4)^2}$. Le correcteur $D(p)$ choisi est un P.I.D. de fonction de transfert † :

$$D(p) = \frac{K}{p}(p+1)(p+4)$$

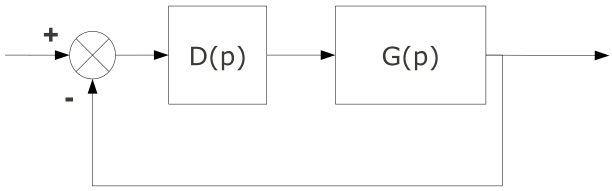

Figure 6 – Asservissement de l'exercice IV

L'objectif de l'exercice est de montrer qu'il existe un paramètre K du correcteur $D(p)$ pour lequel l'asservissement se comporte comme un système d'ordre 2 de coefficient d'amortissement $\xi = 0.7$.

20. Pour le correcteur $D(p)$, écrire, en fonction de K, la fonction de transfert $F(p)$ en boucle fermée.

21. Identifier le dénominateur de $F(p)$ au polynôme :

$$(p+a)\left(p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2\right)$$

22. Pour $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, déduire a, ω_n et K.
Pourquoi seule la solution pour laquelle $a > 0$ est acceptable ?

23. Déduire la valeur des pôles de l'asservissement ainsi corrigé.

24. Que peut-on dire du pôle $-a$ par rapport aux deux autres pôles ?

25. Ce correcteur vous paraît-il convenable ? Justifier.

†. cette forme ne fait pas partie de celles vues en cours et/ou TD mais elle est bien adaptée à la synthèse par la méthode du modèle dans cette étude de cas.