École des Mines d'Albi-Carmaux — Septembre 2014

Formation Initiale – M1

AUTOMATIQUE
ANALYSE ET COMMANDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES ÉCHANTILLONNÉS

EPREUVE DE RATTRAPAGE

(Notes de cours et TD autorisées)

– Durée : 1,5 heures –

Exercice 1 : (5 points)

On considère le système échantillonné de la figure 1.

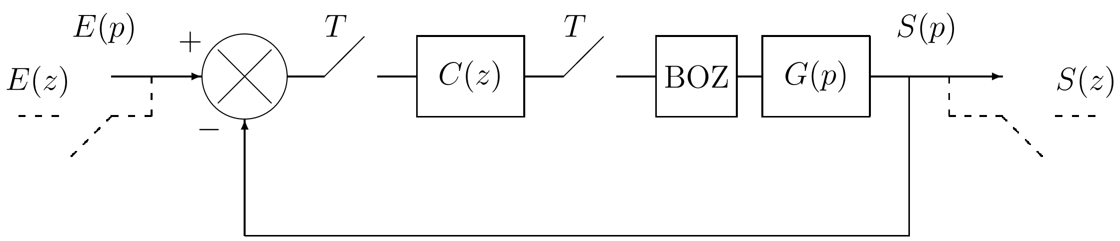

Fig. 1 – Un système échantillonné

Le procédé continu à piloter a pour fonction de transfert $G(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p+1}$

La période d'échantillonnage est fixée à 1 s.

1.1) Calculer la fonction de transfert équivalente au procédé $G(p)$ précédé du BOZ.

1.2) Calculer le gain statique du système en boucle fermée lorsque le correcteur $C(z)$ est un correcteur proportionnel de gain K. Conclure sur la précision du système en BF.

Exercice 2 : (13 points)

On considère le système continu de la figure 2.

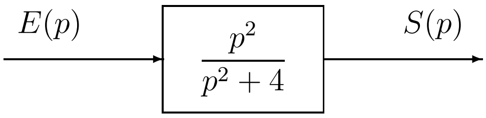

Fig. 2 – Un système continu

2.1) Ce système est-il stable ?

2.2) Calculer la réponse à un échelon unité et la tracer avec le plus de soin possible.

On échantillonne ce système suivant le schéma de la figure 3.

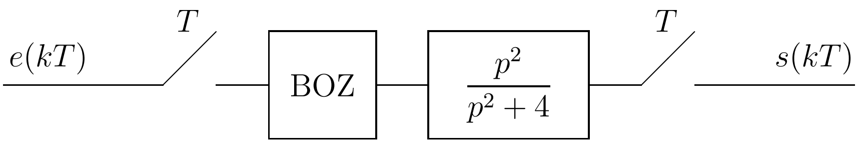

Fig. 3 – Système échantillonné

2.3) Calculer la fonction de transfert de ce système échantillonné[1].

A partir d'ici, on s'intéresse à l'influence de la période d'échantillonnage T sur la valeur des échantillons $s(kT)$ fournis par le système échantillonné.

Pour les tracés des questions **2.2)**, **2.4c)** et **2.5c)**, on adoptera la même échelle horizontale.

2.4) Pour $T = \dfrac{\pi}{4}$:

2.4a) Montrer que la fonction de transfert du système vaut $\dfrac{z(z-1)}{z^2+1}$.

[1] On l'exprimera en fonction de T qui n'est pas fixé pour l'instant.

2.4b) Calculer la valeur des 6 premiers échantillons fournis par le système échantillonné en réponse à un échelon unitaire en entrée.

2.4c) Tracer la réponse échantillonnée.

2.5) Pour $T = \pi$:

2.5a) Montrer que la fonction de transfert du système vaut 1.

2.5b) Calculer la valeur des 6 premiers échantillons fournis par le système échantillonné en réponse à un échelon unitaire en entrée.

2.5c) Tracer la réponse échantillonnée.

2.6) À partir de la comparaison des tracés des questions **2.2)**, **2.4c)** et **2.5c)**, conclure.

Exercice 3 : (3 points)

On considère le système continu de fonction de transfert $G(p) = \dfrac{2}{p^2 + 1}$.

3.1) « Numériser » ce système en utilisant la transformation d'Euler[2].

3.2) Calculer l'équation récurrente reliant les échantillons de sortie et les échantillons d'entrée du système numérique calculé à la question **3.1)**.

---

[2] $p \to \dfrac{1 - z^{-1}}{T}$

APPENDIX J

z-Transform Table

Laplace Transform	Time Function	z-Transform
1	Unit impulse $\delta(t)$	1
$\frac{1}{s}$	Unit step $u_s(t)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{1-e^{-Ts}}$	$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$	$\lim_{\alpha\to 0} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\left[\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}\right]$
$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$
$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$	$\frac{Tze^{-\alpha T}}{(z-e^{-\alpha T})^2}$
$\frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$	$1-e^{-\alpha t}$	$\frac{(1-e^{-\alpha T})z}{(z-1)(z-e^{-\alpha T})}$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{ze^{-\alpha T} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \omega T + e^{-2\alpha T}}$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{z(z-\cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{z^2 - ze^{-\alpha T} \cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \omega T + e^{-2\alpha T}}$