

UE CSy – module P4
ANALYSE ET COMMANDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS
DANS L'ESPACE D'ÉTAT

(Notes de cours et TD autorisées)

– Durée : 2 heures –

– Les 3 exercices sont indépendants –

Exercice 1 : Echangeur de chaleur¹ (6 points)

Soit l'échangeur de chaleur de la figure 1.

Il comporte un étage chaud (température d'entrée T_{Hi} , température T_H , débit f_H) et un étage froid (température d'entrée T_{Ci} , température T_C , débit f_C).

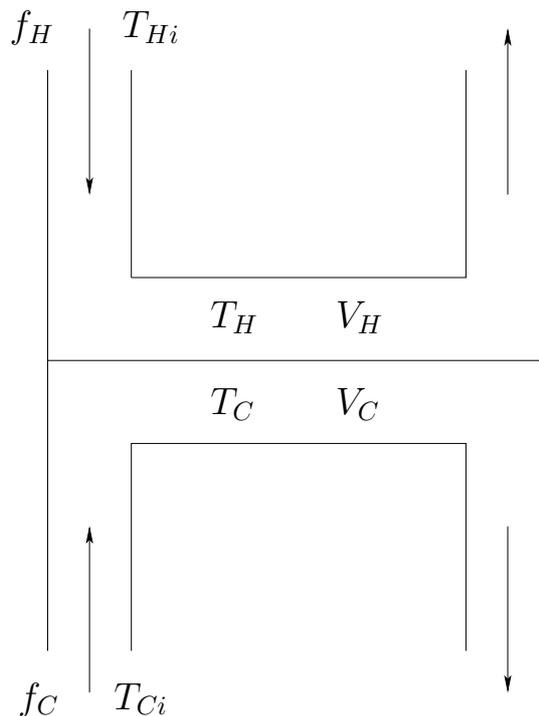


FIG. 1 – Schéma d'un échangeur de chaleur

¹Extrait du polycopié de cours d'automatique de Denis Arzelier, LAAS-CNRS.

Pour chaque étage, les équations de la physique s'écrivent :

$$V_C \frac{dT_C}{dt} = f_C (T_{Ci} - T_C) + \beta (T_H - T_C)$$
$$V_H \frac{dT_H}{dt} = f_H (T_{Hi} - T_H) - \beta (T_H - T_C)$$

où β est une constante dépendant du coefficient de transfert de chaleur, de la capacité calorifique des fluides...

On suppose les flux constants et égaux $f_H = f_C = f$. Les variables d'état sont $(x_1, x_2) = (T_C, T_H)$. Les températures d'entrée sont les commandes et les observations sont les températures T_C et T_H .

- 1.1) Ecrire la représentation d'état de ce système.
- 1.2) Faire une application numérique avec :
 $f = 0.01 \text{ m}^3/\text{min}$; $\beta = 0.2 \text{ m}^3/\text{min}$; $V_H = V_C = 1 \text{ m}^3$
- 1.3) Calculer la matrice de transfert du système.
- 1.4) En déduire la fonction de transfert qui relie les variations de la température de l'étage froid aux variations de la température du fluide entrant dans l'étage chaud.
- 1.5) Si les températures des fluides entrant dans les étages froid et chaud varient de 1°C , de combien variera la température de l'étage froid en régime permanent ?

Exercice 2 : (6 points)

On considère le système décrit par la représentation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

- 2.1) Ce système est-il stable? commandable? observable?
- 2.2) Calculer sa fonction de transfert.
- 2.3) Calculer sa forme canonique de Jordan.

- 2.4) Dessiner le schéma-blocs correspondant à la forme canonique de Jordan déterminée à la question 2.3)

Exercice 3 : (8 points)

On considère le système décrit par la fonction de transfert $\frac{9}{p^2 - 9}$

- 3.1) Que peut-on dire de ce système ?
- 3.2) Ecrire sa représentation d'état sous forme canonique d'observabilité (avant de poursuivre l'exercice, on aura intérêt à vérifier qu'elle conduit bien à la fonction de transfert initiale).
- 3.3) Ce système est-il commandable ?
- 3.4) Calculer la matrice de retour d'état K assurant des pôles en boucle fermée égaux à $p = -3 \pm 3j$.
- 3.5) Calculer la valeur du gain précompensateur N assurant une erreur de position nulle en régime permanent (i.e. loi de commande : $u(t) = N v(t) - K x(t)$, où $v(t)$ désigne l'entrée du système en boucle fermée).
- 3.6) Calculer la matrice G de l'observateur identité dont les pôles sont $p = -6 \pm 6j$.