École des Mines d'Albi-Carmaux — Décembre 2012
Formation Initiale – M1

UE CSy – module P4
ANALYSE ET COMMANDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS DANS L'ESPACE D'ÉTAT
(Notes de cours et TD autorisées)

– Durée : 2 heures –

– *Les 4 exercices sont indépendants* –

Exercice 1 : (5 points)

Le comportement d'un système à 2 entrées u_1 et u_2 est décrit par les équations suivantes :

$$\ddot{z}_1 + 3\,\dot{z}_2 + 4\,\dot{z}_1 + z_1 = u_1 - 2\,u_2$$

$$\ddot{z}_2 + 2\,\ddot{z}_1 + \dot{z}_2 + z_2 = u_1 + u_2$$

On pose comme variables d'état : $x_1 = z_1$, $x_2 = z_2$, $x_3 = \dot{z}_1$, $x_4 = \dot{z}_2$.

1.1) Donner l'équation d'état de ce système.

1.2) Quelle est l'équation de sortie si z_1 et z_2 sont les sorties du système ?

1.3) Même question si les sorties sont z_1 et $\dot{z}_2$.

Exercice 2 : (6,5 points)

On considère le système décrit par la représentation d'état suivante :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

2.1) Ce système est-il stable ? commandable ? observable ?

2.2) Calculer sa fonction de transfert.

2.3) En utilisant la courbe de la figure 1, calculer son temps de réponse à 5%.

2.4) Calculer une loi de commande par retour d'état telle que le système en boucle fermée possède un coefficient d'amortissement $\xi = 0,6$ et une pulsation propre $w_n = 10$ rad/s. Quel sera le temps de réponse à 5% du système bouclé ?

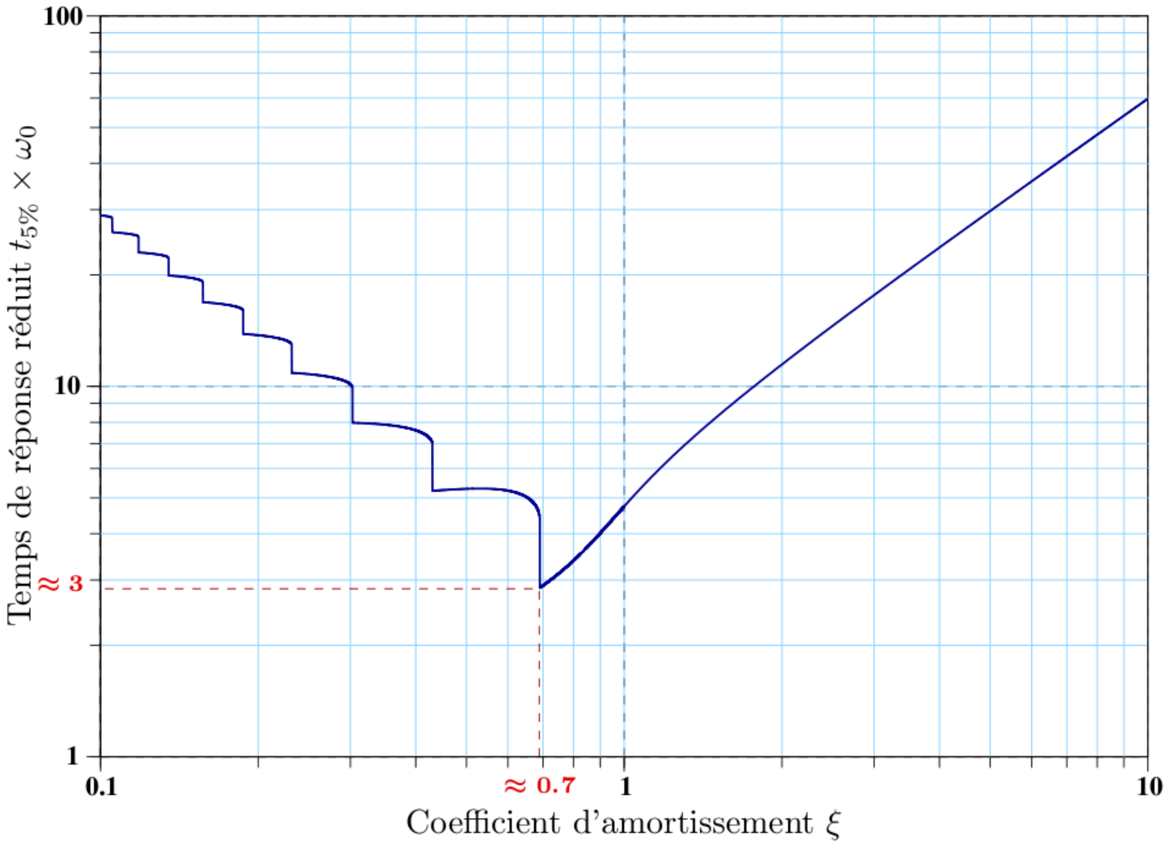

FIG. 1 – Temps de réponse à 5% d'un système du second ordre de coefficient d'amortissement ξ et de pulsation w_0

Exercice 3 : (4 points)

On considère le schéma de la figure 2.
NB : "s" désigne la variable de Laplace.

On appelle x_1 la sortie du dernier intégrateur (le plus à droite), x_2 la sortie du deuxième et x_3 la sortie du premier.

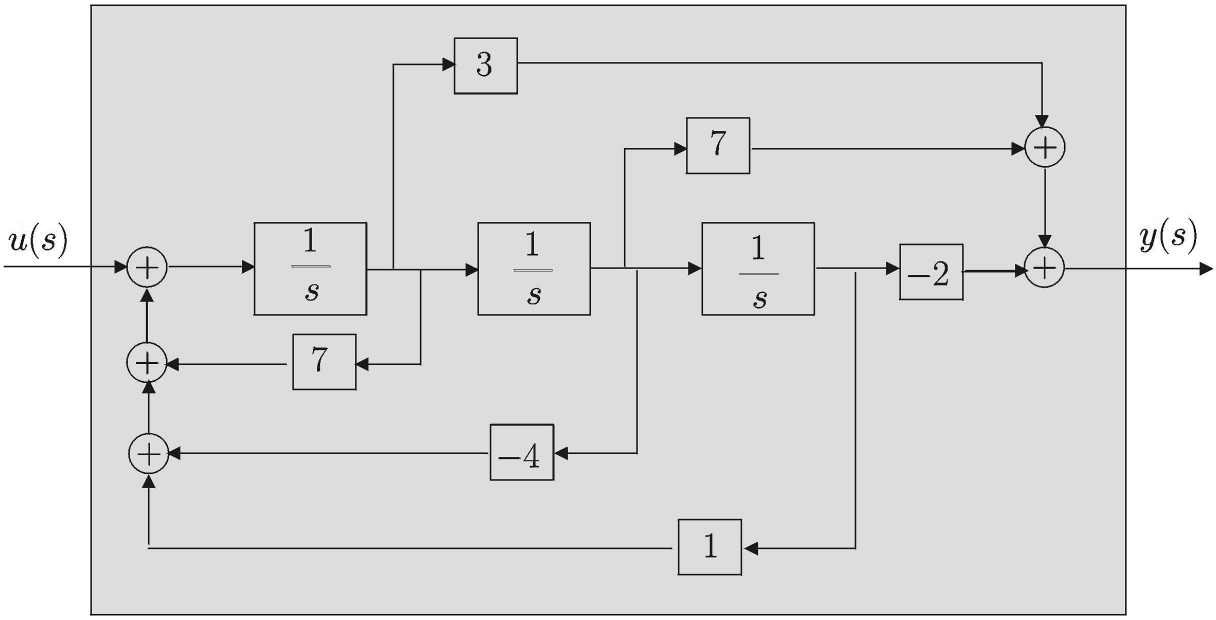

FIG. 2 – Schéma-blocs du système

3.1) Donner la représentation d'état du système correspondant au vecteur d'état :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \end{bmatrix}^T$$

Exercice 4 : (5,5 points)

On considère le système décrit par la représentation d'état suivante :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Le système est observable.
La synthèse d'un observateur identité, désigné par `[obs1]`, a été réalisée ; le vecteur G correspondant, tel qu'il a été défini dans le cours, est donné :

$$G = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4.1) Ecrire l'équation d'état de l'estimation par l'observateur `[obs1]` ? Cet observateur garantit-il que les états estimés convergent vers les états du système ? Justifier.

4.2) Calculer un observateur identité `[obs2]` ayant pour pôles -4 et -10.

4.3) Quelles sont les différences attendues entre `[obs1]` et `[obs2]` ?

Seul le premier état du système est accessible à la mesure. L'observateur `[obs3]` à calculer est un observateur minimal identité ; la dynamique choisie correspond au pôle -5.

4.4) Sans redémontrer les calculs du cours, synthétiser l'observateur `[obs3]` et écrire sa représentation d'état en fonction de y et de u.