École des Mines d'Albi-Carmaux — Septembre 2012
Formation Initiale - M1 - IFIE2014

UE CSy - module M1
MODÉLISATION PAR FONCTION DE TRANSFERT ET ANALYSE DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS

(Notes de cours et TD autorisées)

– Durée : 1,5 heures –

– Les 3 exercices sont indépendants –

Exercice 1 (8 points)

On considère un système composé de deux chariots reliés par un ressort et un amortisseur, posés sur un rail, comme indiqué sur la figure 1.

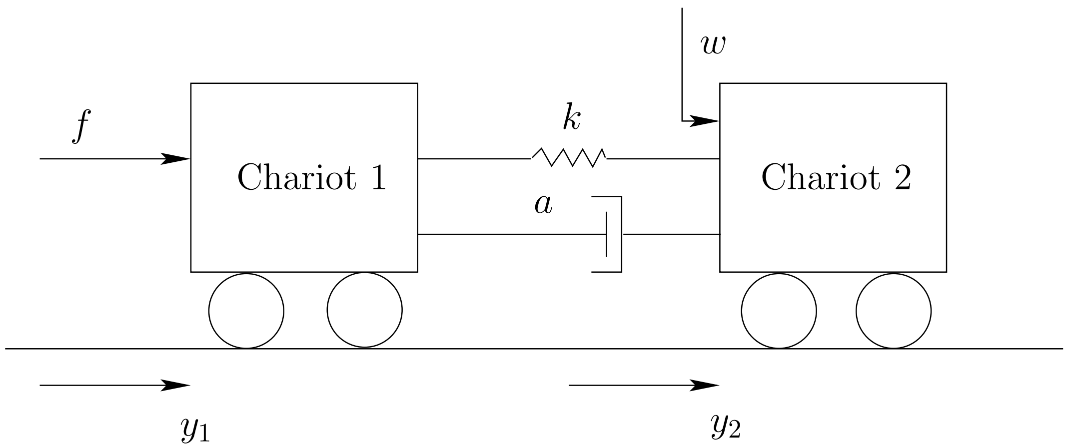

Fig. 1: Deux chariots reliés par un ressort et un amortisseur

On néglige les frottements entre les chariots et le rail.

La commande du système est la force f appliquée sur le chariot 1. La position des chariots par rapport à leur position d'équilibre est notée y_1 et y_2 respectivement.

On suppose que le chariot 2 peut subir une perturbation, notée w, homogène à une force.

En notant m la masse supposée identique de chaque chariot, k le coefficient de raideur du ressort et a le coefficient d'amortissement de l'amortisseur, le comportement de l'ensemble est décrit par les équations suivantes :

$$m\,\frac{d^2y_1(t)}{dt^2} - a\,\frac{d(y_2(t)-y_1(t))}{dt} - k\,(y_2(t)-y_1(t)) = f(t)$$

$$m\,\frac{d^2y_2(t)}{dt^2} + a\,\frac{d(y_2(t)-y_1(t))}{dt} + k\,(y_2(t)-y_1(t)) = w(t)$$

1.1) Combien ce système a-t-il d'entrées et de sorties ?

1.2) Montrer que le système peut être représenté par le schéma-blocs[1] de la figure 2, où $Y_2(p)$, $W(p)$ et $F(p)$ représentent respectivement les transformées de Laplace de $y_2(t)$, $w(t)$ et $f(t)$. On suppose des conditions initiales nulles à $t = 0$.

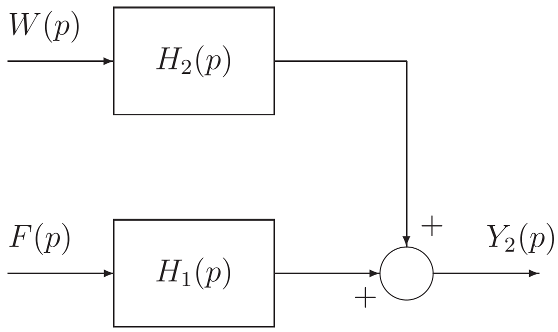

FIG. 2: Schéma-blocs du système

On donnera l'expression des fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$.

Faire une application numérique avec : $m = 1$ kg, $k = 100$ N/m, $a = 0,5$ N.m/s

1.3) Pour chacune des deux fonctions de transfert donner son ordre, sa classe, son gain statique, ses pôles et ses zéros.

Exercice 2 (6 points)

On cherche à identifier les paramètres (K, ξ, w_n) d'un système du second ordre.

On applique à l'entrée du système un signal sinusoïdal de fréquence variable et on mesure le signal de sortie, ce qui conduit au diagramme de Bode de la figure 3.

[1] On notera que le schéma-blocs correspond à l'équation $Y_2(p) = H_1(p)\,F(p) + H_2(p)\,W(p)$

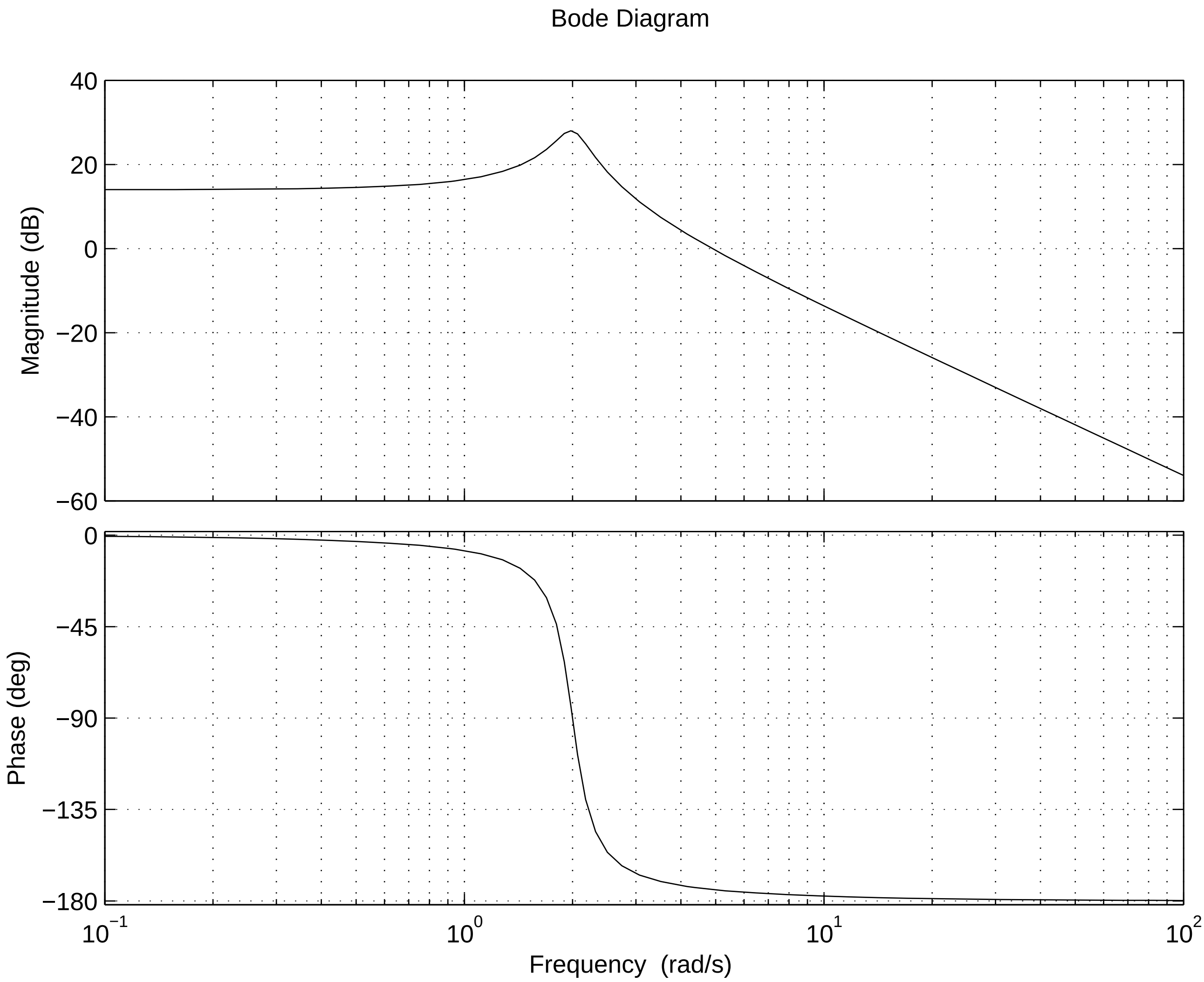

Fig. 3: [EXERCICE 2] : diagramme de Bode

2.1) En déduire[2] les paramètres recherchés.

2.2) Pour un signal d'entrée d'amplitude 10, on mesure un signal de sortie de même amplitude. Quelle est la fréquence du signal appliqué à l'entrée ?

2.3) Le système étant au repos, on fait varier son entrée sous forme d'un échelon de position d'amplitude 5. Quelle sera la valeur atteinte par la sortie en régime permanent ? Quelle sera la valeur maximum atteinte par la sortie avant de se stabiliser (i.e. avant d'atteindre le régime permanent) ?

[2] Tout résultat non justifié ne sera pas pris en compte.

Exercice 3 (6 points)

On considère le système d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$ décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{dy(t)}{dt} + \alpha\, x(t)\, y(t) = \beta\, x(t)$$

3.1) Pour quelle raison ce système est-il non-linéaire ?

3.2) Montrer que le système linéarisé autour du point de fonctionnement $(\overline{x}, \overline{y})$ est un système du 1^{er} ordre. Donner son gain statique et sa constante de temps.