École des Mines d'Albi-Carmaux — Janvier 2012
Formation Initiale – M1

UE CSy – module P4
ANALYSE ET COMMANDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES DANS L'ESPACE D'ÉTAT

(Notes de cours et TD autorisées)

– Durée : 1,5 heures –

Exercice 1 : (5 points)

On s'intéresse au système décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

1.1) Montrer que ce système est instable.

On souhaite stabiliser le système grâce à une commande par retour d'état qui confère au système bouclé les pôles $-1 \pm j$.

1.2) Calculer la matrice de retour d'état qui satisfait au cahier des charges.

Exercice 2 : (10 points)

On s'intéresse au système décrit par la représentation d'état suivante :

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{8}{50} & -1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

2.1) Calculer la fonction de transfert $\dfrac{Y(z)}{U(z)}$.

2.2) Calculer ses pôles.

2.3) Conclure sur la stabilité du système.

2.4) Le système est-il commandable ? (justifier).

2.5) Le système est-il observable ? (justifier).

Dans un permier temps, on considère que l'état est mesurable.

On souhaite élaborer un régulateur à retour d'état tel que le système en boucle fermée résultant :

- **a)** ait comme pôles les zéros du polynôme suivant : $P(z) = (z - \lambda)\left(z + \dfrac{1}{2}\right)$
- **b)** ait une erreur de position nulle.

2.6) Donner l'expression générale de la loi de commande. On notera K la matrice de retour d'état.

2.7) Parmi les valeurs de λ suivantes, indiquer celles qui pourraient êtres choisies (une ou plusieurs possibilités) en justifiant vos réponses :

λ	OUI/NON
2	
-2	
$\dfrac{1}{4}$	
$-\dfrac{1}{4}$	
$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}j$	
$-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}j$	

Pour la suite, on choisira une valeur de λ parmi la(les) réponse(s) « OUI » du tableau précédent.

2.8) Calculer les paramètres de la loi de commande qui satisfont au cahier des charges.

On considère maintenant que l'état n'est pas mesurable.

On souhaite élaborer un observateur d'état qui va permettre d'estimer la valeur des variables d'état nécessaires pour réaliser la commande par retour d'état calculée à la question **2.8)**.

2.9) Calculer l'observateur identité d'ordre plein pour qu'il ait un pôle double en 0.

Exercice 3 : (6 points)

On considère le système d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ représenté par le schéma de la figure 1.

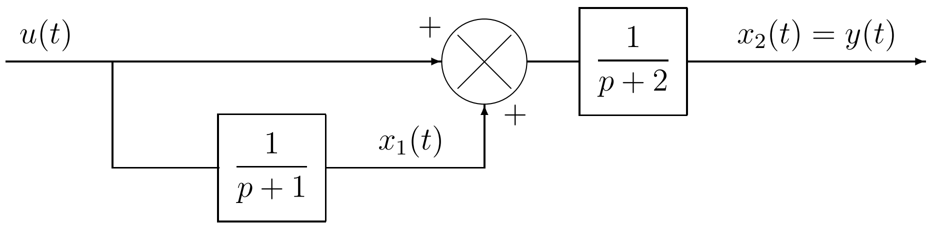

FIGURE 1 – Un système continu

3.1) Calculer la fonction de transfert $\dfrac{Y(p)}{U(p)}$. Donner ses pôles.

3.2) Donner la représentation d'état associée au vecteur d'état $x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

3.3) Re-calculer la fonction de transfert $\dfrac{Y(p)}{U(p)}$ à partir de la représentation d'état.

On souhaite améliorer la rapidité de ce système grâce à une commande par retour d'état qui confère au système bouclé un pôle double en -3.

3.4) Calculer la matrice de retour d'état qui satisfait au cahier des charges. Conclure.