École des Mines d'Albi-Carmaux Février 2011
Formation Initiale - M1

UE CSy - module M1
MODÉLISATION PAR FONCTION DE TRANSFERT DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS OU ÉCHANTILLONNÉS

EPREUVE DE RATTRAPAGE

(Notes de cours et TD autorisées)

– Durée : 1/2 heure –

Mesure de la viscosité d'un fluide[1]

On cherche à comparer la viscosité de différents fluides. Pour ce faire, on étudie pour chaque fluide le comportement d'un pendule de longueur L et de masse M baignant dans un récipient contenant le fluide en question. L'expérience consiste à écarter le pendule d'un angle α_0 par rapport à la verticale, puis à observer son évolution une fois lâché.

La bille du pendule frottera d'autant plus dans le liquide que celui-ci est visqueux et que la vitesse de la bille sera grande. La viscosité se traduit donc par le coefficient K figurant dans l'expression du moment du couple de frottement visqueux : $-K\,L\,\dfrac{d\alpha}{dt}$

On néglige la poussée d'Archimède, les frottements autres que ceux du fluide sur le pendule, la masse du fil et on admet que l'angle α entre le pendule et la verticale reste toujours faible (donc $\sin\alpha = \alpha$).

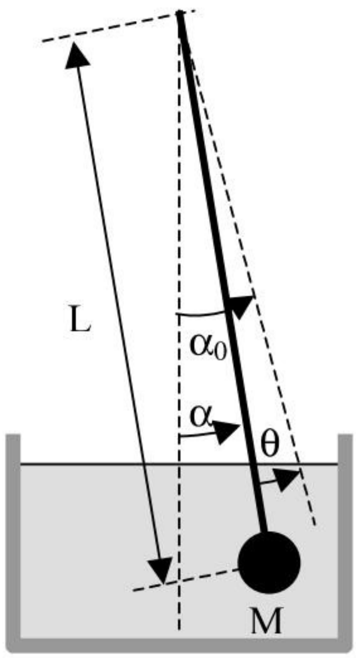

Fig. 1: Pendule oscillant dans un liquide

1) Montrer que l'application du principe fondamental de la dynamique en rotation donne l'équation[2] :

$$M\,L^2\,\frac{d^2\alpha}{dt} + K\,L\,\frac{d\alpha}{dt} + M\,g\,L\,\alpha = 0 \qquad (1)$$

[1]D'après un sujet d'examen conçu initialement par Philippe Desodt, École des Mines de Douai.

[2]On rappelle que le moment d'inertie d'un pendule simple de longueur L et de masse M est égal à $M\,L^2$.

À partir de l'angle θ défini sur la figure 1, on définit une variable $s(t) = \theta(t)/\alpha_0$ de façon à disposer d'une variable « normalisée ». On lâche le pendule à $t = 0$.

2) Sans calcul, indiquer la valeur initiale $s(0)$ et ce que sera probablement sa valeur finale $s(+\infty)$.

3) Montrer que l'introduction dans l'équation (1) de la variable $s(t)$ définie plus haut conduit à une expression de la forme :

$$\frac{L}{g}\frac{d^2s(t)}{dt} + \frac{K}{M\,g}\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 1 \tag{2}$$

L'évolution de la variable $s(t)$ dans notre expérience est identique à la réponse à l'échelon unitaire d'un système dont la sortie $s(t)$ et l'entrée $e(t)$ sont reliées par l'équation suivante :

$$\frac{L}{g}\frac{d^2s(t)}{dt} + \frac{K}{M\,g}\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) \tag{3}$$

4) Déduire de l'équation (3) la fonction de transfert de ce système.

5) De quel type est ce système ?

6) Montrer que sa fréquence propre est indépendante du fluide.

7) Donner l'expression de son coefficient d'amortissement.

On fait osciller le pendule dans deux fluides successifs. Les résultats sont les deux courbes fournies sur la figure 2.

8) En utilisant les courbes de la figure 3 déduire le rapport entre les coefficients K_1 et K_2 qui traduisent les viscosités respectives des deux fluides.

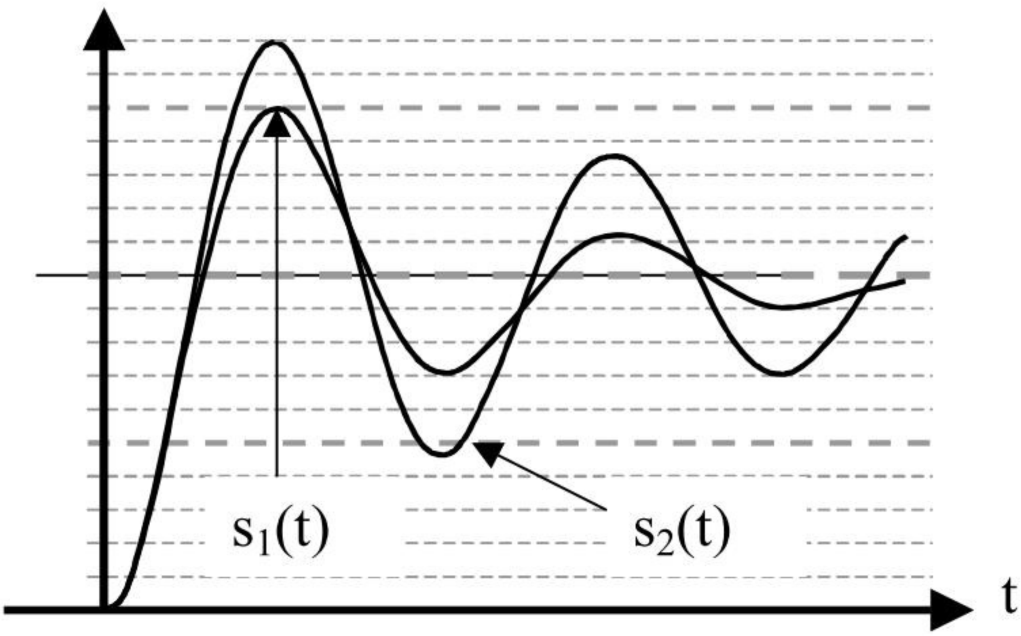

Fig. 2: Oscillation du pendule dans 2 fluides successifs

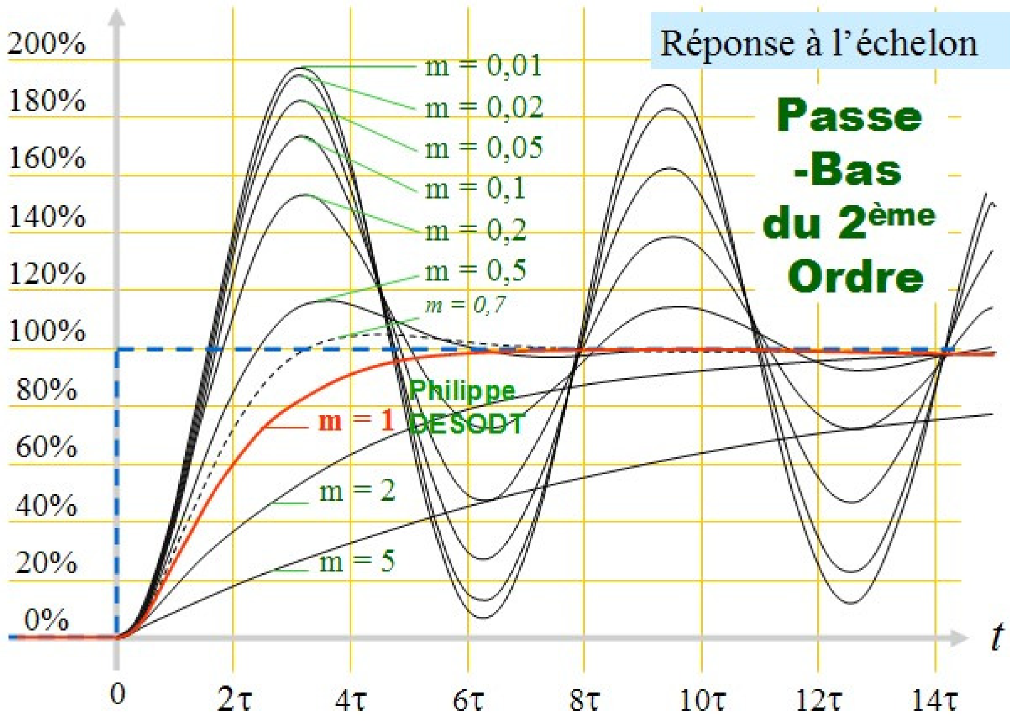

Fig. 3: Réponse d'un système 2nd ordre à un échelon de position unité pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement noté m sur cette figure.