École des Mines d'Albi-Carmaux | Janvier 2011
Formation Initiale - M1

UE CSy - module P4
ANALYSE ET COMMANDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES DANS L'ESPACE D'ÉTAT
(Notes de cours et TD autorisées)

– Durée : 1,5 heures –

Sujet volontairement long[1] *pour que chacun puisse trouver des questions à son goût et ainsi engranger un maximum de points (barème > 20).*

Exercice 1 : Commande de l'orientation d'un satellite (14 points)

On considère la commande (très simplifiée) de l'orientation d'un satellite. Cette orientation est caractérisée par trois angles dont on suppose qu'ils peuvent être commandés indépendamment. L'objectif est ici de commander uniquement l'angle de lacet θ (cf. Figure 1).

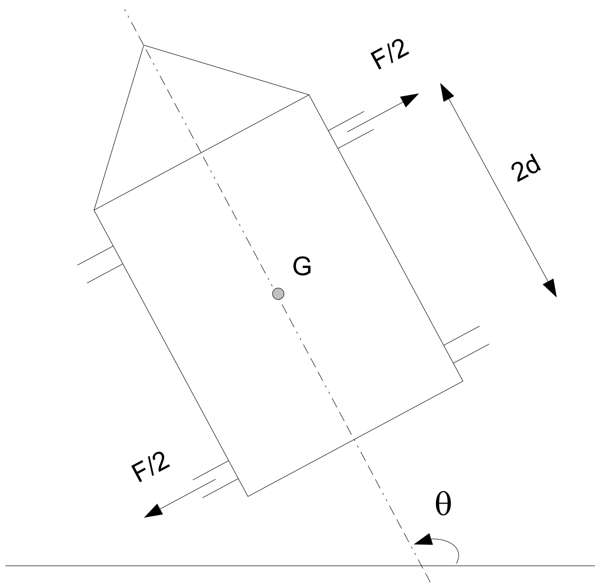

Fig. 1 – Schéma simplifié du pilotage d'un satellite en rotation

Pour cela, on peut réaliser de petits jets de gaz dans les directions indiquées par les flèches sur la figure 1 et, par réaction, le corps du satellite pivote autour de son centre de gravité G. Deux poussées sont effectuées simultanément en deux points du corps du satellite symétriques par rapport à G, de telle sorte que le bras de levier est approximativement

[1] l'énoncé est long mais les réponses sont souvent très courtes.

de d mètres. L'intensité de chaque poussée est de $\frac{F}{2}$ Newton. Le corps du satellite est donc soumis à un couple $\Gamma = F\,d$ (en N m). On note J le moment d'inertie (en kg m^2).

L'entrée du système est donc la force $F(t)$ issue de la réaction aux jets, et la sortie est la variation de l'angle de lacet $\theta(t)$.

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, on trouve directement l'équation différentielle régissant le comportement entrée/sortie du satellite :

$$J\,\ddot{\theta}(t) = F(t)\,d$$

1.1) Calculer la fonction de transfert du système.

1.2) À partir d'une position d'équilibre, on souhaite faire tourner le satellite d'un angle θ_0. Pour cela, on envoie simultanément 2 jets de gaz impulsionnels (i.e. $F(t) = F_0\,\delta(t)$, où $\delta(t)$ est le signal de Dirac). Calculer $\theta(t)$ et en déduire le comportement du satellite ? Pourquoi cela était-il prévisible ?

1.3) Donner la représentation d'état de ce système associée au vecteur d'état

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

1.4) Analyser la stabilité du système.

1.5) Retrouver la fonction de transfert à partir de la représentation d'état.

1.6) Appliquer la méthode de placement de pôles par retour d'état pour placer un pôle double en -2. Donner l'expression de la force $F(t)$ permettant de réaliser la commande souhaitée.

1.7) Calculer la fonction de transfert du système en boucle fermée.

1.8) Quelle est la rotation effective du satellite pour une consigne θ_c variant sous forme d'un échelon de position d'amplitude θ_0 ? Commentaire.

Pour réaliser la commande précédente, on souhaite utiliser un observateur qui va permettre d'estimer la valeur des deux variables d'état nécessaires.

1.9) On souhaite que la dynamique de l'observateur soit 3 fois plus rapide que la dynamique du système bouclé. Quel choix de pôles de l'observateur répond à cet objectif ?

1.10) Synthétiser l'observateur identité d'ordre plein correspondant.

Exercice 2 : (6 points)

On considère le procédé continu d'entrée $u(t)$, de sortie $y(t)$ et de fonction de transfert :

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{p-3}$$

2.1) Donner la représentation d'état de ce procédé continu correspondant au vecteur d'état $x(t) = y(t)$ (matrices A, B, C et D).

On décide d'échantillonner ce procédé continu. On utilise un BOZ et on note T la période d'échantillonnage.

2.2) Donner la représentation d'état du procédé échantillonné (matrices F, G, P, Q).

2.3) Analyser la stabilité du procédé.

2.4) À partir de la représentation d'état échantillonnée, calculer la fonction de transfert numérique $\frac{Y(z)}{U(z)}$ (c'est histoire de se rassurer car cette fonction de transfert est connue).

On décide de réaliser une commande numérique du procédé.

2.5) Calculer la matrice de retour d'état K qui confère au système en boucle fermée un pôle $z = 0,5$. Ce choix vous semble-t-il judicieux ? Argumenter.

Exercice 3 : Modélisation des transferts de chaleur au sein d'une habitation (6 points)

On considère une habitation modélisée par une seule pièce et un grenier (cf. Figure 2). Il n'y a pas de chauffage dans l'habitation. On note T_i la température de la pièce principale, T_e la température extérieure et T_g la température du grenier. Le transfert de chaleur entre la pièce principale et l'extérieur se fait à travers l'ensemble des 4 murs de résistance thermique globale R_m. Le transfert de chaleur entre l'extérieur et le grenier se fait à travers le toit de résistance thermique R_t. Le transfert de chaleur entre la pièce principale et le grenier se fait à travers le plafond de résistance thermique R_p. Les capacités calorifiques de la pièce principale et du grenier sont notées C_i et C_g respectivement.

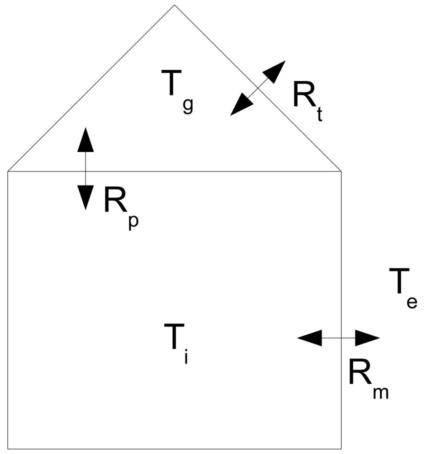

FIG. 2 – Transferts de chaleur au sein d'une habitation

Il est facile de montrer que les équations différentielles régissant le fonctionnement du système sont :

$$\frac{d\,T_i}{dt} = \frac{1}{C_i}\left[\frac{1}{R_p}(T_g - T_i) + \frac{1}{R_m}(T_e - T_i)\right]$$

$$\frac{d\,T_g}{dt} = \frac{1}{C_g}\left[\frac{1}{R_t}(T_e - T_g) + \frac{1}{R_p}(T_i - T_g)\right]$$

L'entrée du système est T_e et la sortie est T_i.

3.1) Donner la représentation d'état de ce système associée au vecteur d'état

$$x = \begin{bmatrix} T_i \\ T_g \end{bmatrix}$$

Pour simplifier la suite des calculs, on notera a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} et d_{ij} les coefficients des matrices A, B, C et D de cette représentation d'état.

3.2) Préciser les expressions littérales des coefficients a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} et d_{ij}.

3.3) Donner la fonction de transfert du système en fonction des coefficients a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} et d_{ij}.

3.4) Donner la fonction de transfert qui relie l'entrée T_e à la température T_g. On veillera à exploiter au maximum les calculs effectués à la question 3.3).

3.5) La température extérieure étant connue, peut-on connaître la température T_g dans le grenier en ne mesurant que la température T_i dans la pièce principale ? Justifier la réponse.