École des Mines d'Albi-Carmaux — Décembre 2009
Formation Initiale 3ième année

AUTOMATIQUE
ANALYSE ET COMMANDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS OU ÉCHANTILLONNÉS

(Notes de cours et TD autorisées)

Sujet volontairement long[1] pour que chacun puisse trouver des questions à son goût et ainsi engranger un maximum de points (barème > 20).

Les 3 exercices sont indépendants.

Exercice 1 : (4 points)

On considère le procédé continu suivant :

$$G(p) = \frac{1}{1 + 2\,p}$$

que l'on se propose de piloter dans une boucle d'asservissement numérique à retour unitaire avec un correcteur proportionnel de gain K_c suivant le schéma de la figure 1.

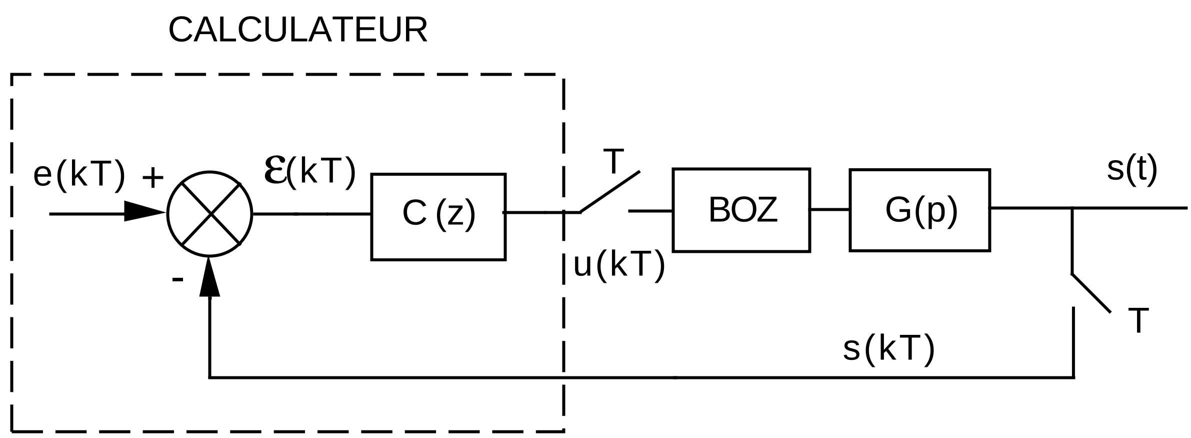

FIG. 1 – Commande numérique d'un procédé continu

1.1) Rappeler l'expression de la fonction de transfert en z équivalente à un 1^er ordre continu $\dfrac{K}{1 + \tau\, p}$ précédé d'un BOZ (= 1$^{\text{er}}$ ordre numérique).

[1] l'énoncé est long mais les réponses sont souvent très courtes.

1.2) Donnez la condition de stabilité du système asservi.

En augmentant progressivement le gain K_c du correcteur, on constate que le système asservi commence à devenir instable lorsque K_c égale 4.

1.3) En déduire la valeur de la période d'échantillonnage utilisée.

Exercice 2 : (8 points)

On considère le procédé continu suivant :

$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau\, p}\, e^{-p}$$

que l'on se propose de piloter dans une boucle d'asservissement numérique à retour unitaire avec un correcteur $C(z)$ suivant le schéma de la figure 1.

On prendra : $K = 5$ et $\tau = 8$ s.
On choisit une période d'échantillonage $T = 1$ s.
On posera : $\alpha = e^{-T/\tau}$.

L'équation récurrente permettant de calculer les échantillons de commande à partir des échantillons de l'écart est la suivante :

$$u(k) = 0,6065\, u(k-1) + 0,2361\, u(k-2) + 0,4018\, \varepsilon(k) - 0,3546\, \varepsilon(k-1)$$

2.1) En déduire l'expression du correcteur $C(z)$ mis en œuvre. Vérifiez que α est une racine de son numérateur.

2.2) Montrez que la FTBO du système est égale à :

$$\frac{0,2361}{z^2 - 0,6065\, z - 0,2361}$$

En déduire sa FTBF.

2.3) Montrez que la FTBF correspond à un 1^{er} ordre numérique avec retard et calculer son gain statique et sa constante de temps. Conclure.

2.4) En déduire la valeur de la sortie en régime permanent $s(+\infty)$ en réponse à une entrée de type échelon unité. Conclure.

Exercice 3 : asservissement de position d'un moteur linéaire[2] (12 points)

Le système étudié est un moteur linéaire commandant le déplacement d'une tête de lecture d'un lecteur CD (voir Figure 2).

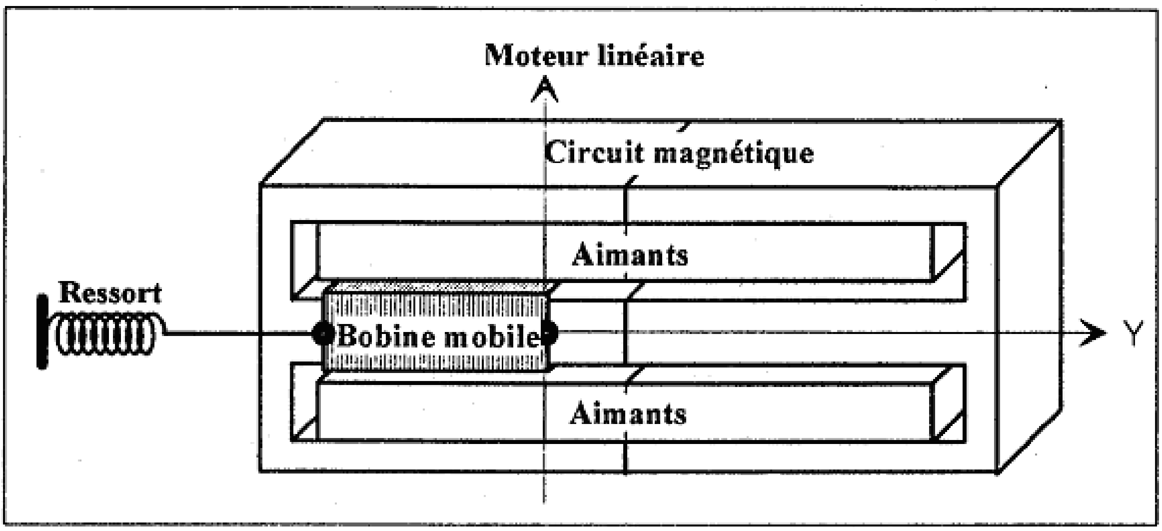

FIG. 2 – Système étudié

On note :
- u : la commande en tension d'entrée du système,
- L : l'inductance de la bobine mobile,
- R : la résistance électrique de la bobine,
- e : la force contre-électromotrice,
- α : le coefficient liant e à la vitesse de déplacement,
- i : le courant dans la bobine,
- y : la position de la bobine (correspond à la sortie du système),
- k : la raideur du ressort,
- m : la masse de l'ensemble mobile,
- β : le coefficient liant la force appliquée à la bobine et le courant i,
- f : le coefficient de frottement.

Le procédé vérifie alors le système différentiel suivant :

$$u(t) = R\,i(t) + L\,\frac{di(t)}{dt} + e(t) \quad (1)$$

$$e(t) = \alpha\,\frac{dy(t)}{dt} \quad (2)$$

[2] d'après un sujet d'examen de l'Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers - spécialité AGE, année 2006.

$$m \frac{d^2y(t)}{dt^2} = -k\, y(t) - f\, \frac{di(t)}{dt} + \beta\, i(t) \tag{3}$$

3.1) Ecrire la représentation d'état de ce système (équation dynamique + équation de sortie) correspondant au vecteur d'état :

$$x(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix}$$

<u>Première commande par retour d'état</u> :

Un de vos collègues vous précise qu'il a déjà étudié ce système et que certaines constantes sont négligeables. Il vous fournit alors la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

correspondant à :

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix}$$

Vous décidez alors d'asservir en position la tête de lecture à l'aide d'une commande par retour d'état. Vous posez donc $u(t) = -K\, x(t) + y_c(t)$ où K désigne le gain de retour d'état et $y_c(t)$ désigne la consigne de position.

3.2) Ecrire les équations d'état du système asservi correspondant. Quelle est la matrice d'état (matrice dynamique) du système bouclé ?

3.3) Caractérisez sa dynamique en précisant le polynôme caractéristique du système bouclé.

3.4) Déterminez le gain K afin que la dynamique du procédé en boucle fermée soit représentée par un système du second ordre d'amortissement $\zeta = 1$ et de pulsation propre $w_n = 2$ rad/s.
Que remarquez-vous ?

3.5) Justifiez le résultat de la question précédente.

Deuxième commande par retour d'état :

À la vue du résultat précédent, vous commencez à mettre en doute la représentation d'état proposée par votre collègue. Vous lui demandez alors de vous préciser les constantes du système qui sont négligeables. Il vous répond que $L = 0$ et $f = 0$.

3.6) En se référant aux équations (1), (2) et (3), et en posant $L = 0$ et $f = 0$, donnez le nouveau système différentiel vérifié par le système et en déduire les équations d'état correspondant au vecteur d'état suivant :

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dfrac{m\,R}{\beta}\,\dfrac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix}$$

3.7) Calculez la fonction de transfert correspondante.

3.8) Est-il possible avec cette nouvelle modélisation de calculer un retour d'état (placement de pôles) qui permette au système en boucle fermée d'avoir les caractéristiques dynamiques spécifiées à la question 3.4 ? Justifiez votre réponse.