École des Mines d'Albi-Carmaux — Décembre 2008
Formation Initiale 3ième année

AUTOMATIQUE
ANALYSE ET COMMANDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES
CONTINUS OU ÉCHANTILLONNÉS
(Notes de cours et TD autorisées)

Sujet volontairement long[1] pour que chacun puisse trouver des questions à son goût et ainsi engranger un maximum de points (barême > 20).

Les 4 exercices sont indépendants.

Quasiment toutes les questions peuvent être traitées séparément les unes des autres.

Exercice 1 : (10 points)

NB1 : la plupart des questions sont indépendantes.
NB2 : ne pas trainer des expressions littérales inutilement et faire une application numérique dès que possible.

On considère le système continu suivant :

$$G(p) = \frac{5}{1 + 4\,p}$$

On souhaite concevoir un système en boucle fermée (à retour unitaire) qui satisfait le cahier des charges suivant :

a) le système en boucle fermée se comporte comme un système du 1$^{\text{er}}$ ordre

b) il est 10 fois plus rapide qu'en boucle ouverte

c) il est précis vis-à-vis d'un échelon de consigne

1.1) Quel est le temps de réponse à 5% du système en boucle ouverte ? Quelle devra être la constante de temps du système en boucle fermée ?

1.2) Que faut-il faire pour satisfaire la condition c) ? Expliquer pourquoi.

[1]l'énoncé est long mais les réponses sont souvent très courtes.

1ère partie : commande analogique

On utilise un correcteur continu de type PI, de fonction de transfert :

$$C_1(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i\, p}\right)$$

et on réalise une commande analogique suivant le schéma de la figure 1.

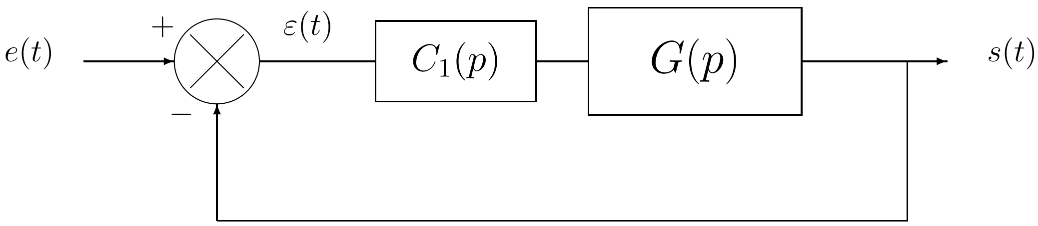


FIG. 1 – Système bouclé analogique avec correcteur PI

1.3) Déterminer les paramètres du correcteur PI qui conduisent à un système en boucle fermée du 1^{er} ordre[2], avec la rapidité souhaitée.

2ème partie : commande numérique

On se propose de réaliser la commande numérique du processus continu $G(p)$ suivant le schéma de la figure 2.

On choisit une période d'échantillonnage $T = 0,5$ s.

Dans un premier temps, on décide de calculer le correcteur numérique $C(z)$ à partir du correcteur analogique $C_1(p)$ trouvé à la question 1.3).

1.4) Discrétiser le correcteur PI trouvé à la question 1.3) par la méthode de Tustin[3] et en déduire l'équation récurrente à programmer dans l'ordinateur pour réaliser la commande numérique du procédé.

[2] Indication : pour que la FTBF soit du 1^{er} ordre, il suffit que la FTBO soit d'ordre 1 (cf. compensation du pôle du procédé).

[3] Rappel : $p \longrightarrow \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$

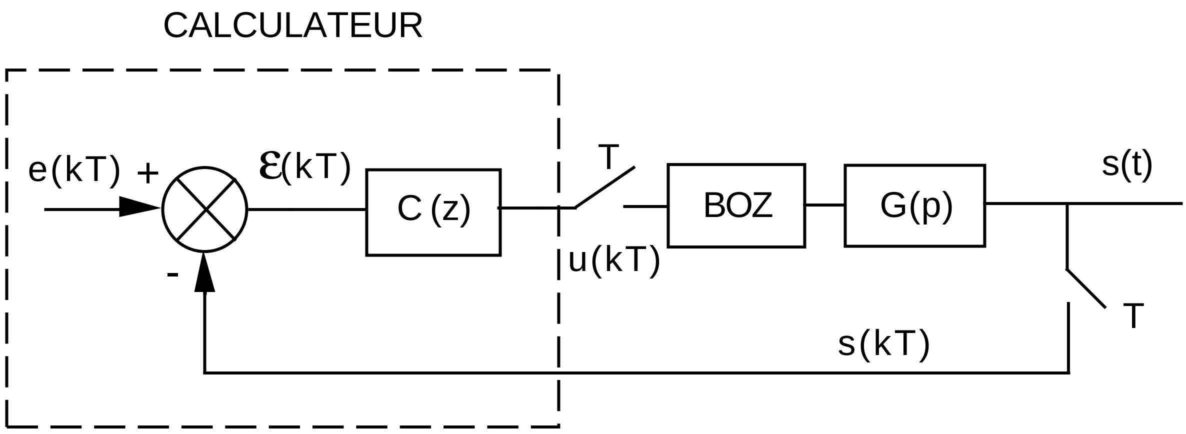


FIG. 2 – Commande numérique d'un procédé continu

Dans un deuxième temps, on se propose de calculer directement un correcteur numérique $C(z)$ qui satisfait le cahier des charges donné en préambule.

1.5) Montrer que la fonction de transfert en boucle fermée $\dfrac{S(z)}{E(z)}$ qui satisfait le cahier des charges donné en préambule est égale à[4] :

$$H(z) = \frac{0,7135}{z - 0,2865}$$

1.6) Calculer la fonction de transfert numérique équivalente au processus continu $G(p)$ précédé par le bloqueur d'ordre zéro, que l'on notera $G_1(z)$.

1.7) Donner la relation reliant $H(z)$, $C(z)$ et $G_1(z)$.

1.8) En déduire les paramètres du correcteur PI discret, de fonction de transfert notée $C_2(z) = K_2 \left(1 + K_3 \dfrac{z}{z-1}\right)$, qui assure les objectifs fixés par le cahier des charges.

1.9) En déduire l'équation récurrente permettant de réaliser la commande numérique trouvée.

[4]On rappelle que la fonction de transfert d'un 1er ordre numérique de gain K et de constante de temps τ s'écrit : $H(z) = K\dfrac{1-\alpha}{z-\alpha}$ avec $\alpha = e^{-\frac{T}{\tau}}$. On commencera par trouver la valeur de τ qui convient.

Exercice 2 : (4 points)

On considère le système numérique du $2^{\text{ème}}$ ordre de fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{0,5\,z}{z^2 - 0.786\,z + 0.368}$$

échantillonné à une fréquence de 10 Hz.

On s'intéresse aux caractéristiques de sa réponse $s(kT)$ à un échelon unité.

2.1) En utilisant les abaques fournies en annexe, déterminer[5] :

a) la valeur du 1^{er} dépassement

b) la valeur du temps de pic (en secondes)

2.2) Calculer la valeur de la réponse en régime permanent ($s(+\infty)$).

Exercice 3 : Modélisation d'un système masses-ressorts (5 points)

On considère le système d'entrée f et de sortie z_1 de la figure 3.

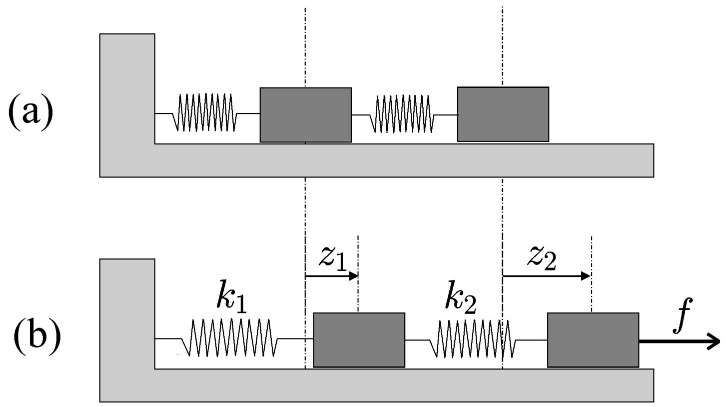


FIG. 3 – Un système masses-ressorts : (a) système au repos, (b) système dans un état quelconque

[5]Les abaques devront être rendues avec la copie.

Notations :

- f : force appliquée sur le deuxième chariot
- z_i : écart du $i$ème chariot par rapport à sa position d'équilibre
- m_i : masse du $i$ème ressort
- k_i : raideur du $i$ème ressort
- α : coefficient de frottement visqueux

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au chariot 2 puis au chariot 1 conduit aux équations[6] :

$$\begin{aligned} m_2\,\ddot{z}_2 + \alpha\,\dot{z}_2 + k_2(z_2 - z_1) &= f \\ m_1\,\ddot{z}_1 + k_1\,z_1 + \alpha\,\dot{z}_1 - k_2(z_2 - z_1) &= 0 \end{aligned}$$

Donner la représentation d'état de ce système correspondant au vecteur d'état suivant :

$$x = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dot{z}_1 \\ z_2 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : (4 points)

On considère le système décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

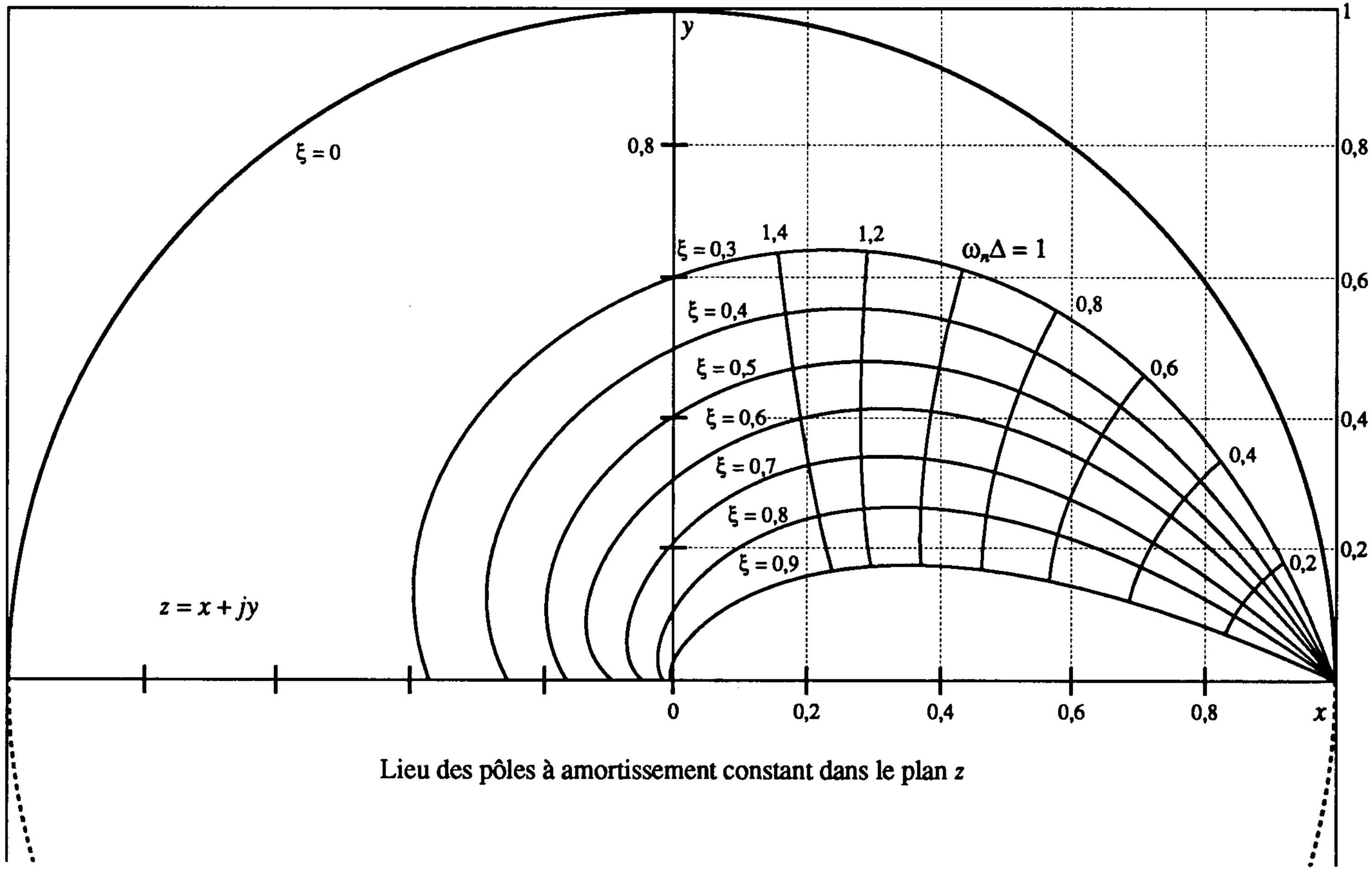
4.1) Montrer que ce système est instable.

On se propose d'améliorer le comportement du système en recourant à une commande par retour d'état.

4.2) Calculer la matrice de retour d'état K qui conduit à un système en boucle fermée présentant les 2 pôles suivants :

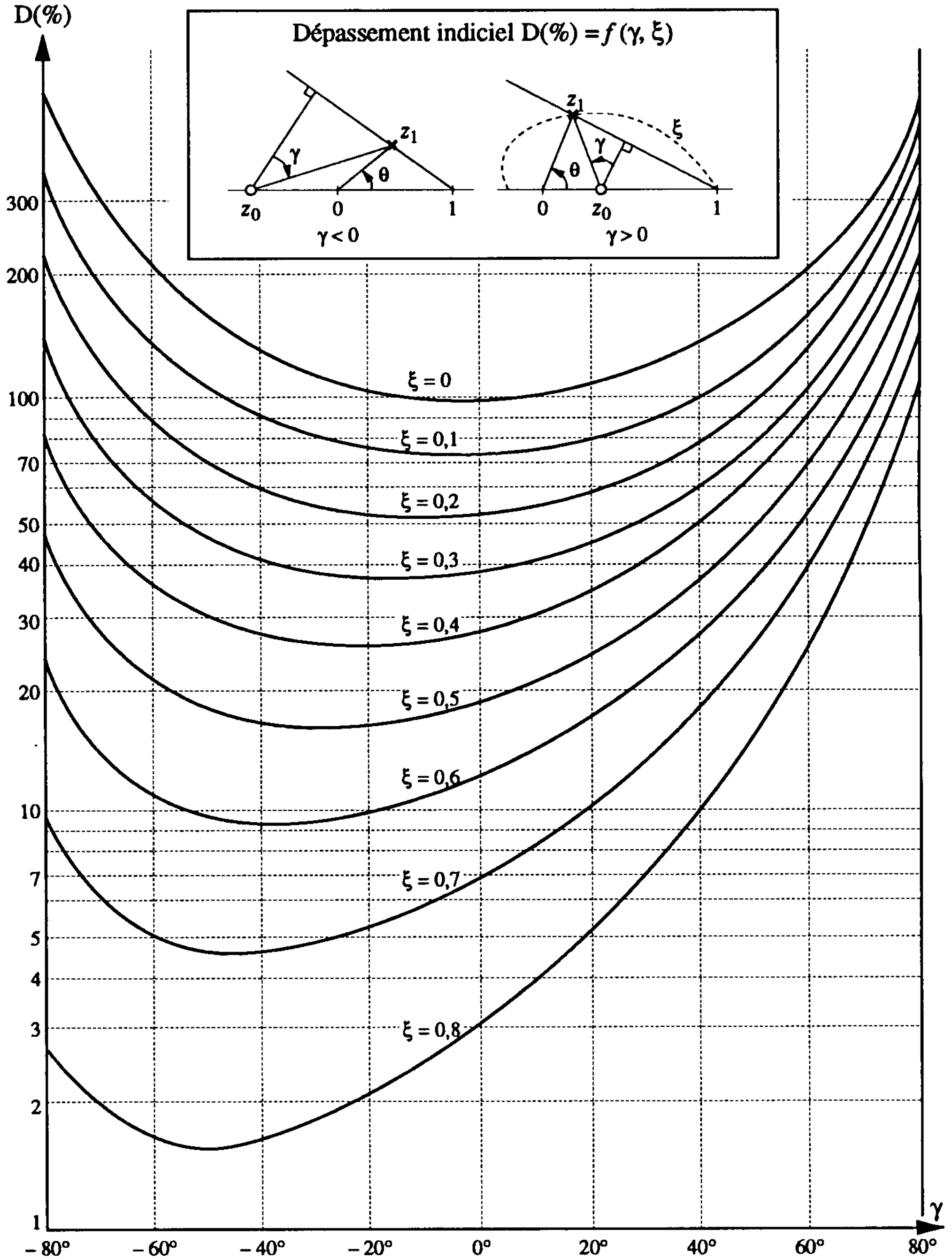
$$\begin{aligned} p_1 &= -2 + j \\ p_2 &= -2 - j \end{aligned}$$

[6] Le correcteur est sympa de donner les équations.



Lieu des pôles à amortissement constant dans le plan z

$$H(z) = \frac{z - z_0}{(z - z_1)(z - z_1^*)}$$



$$H(z) = \frac{z - z_0}{(z - z_1)(z - z_1^*)}$$

Temps du premier maximum $n\theta = f(\gamma, \xi)$