École des Mines d'Albi-Carmaux — Janvier 2008
Formation Initiale 3ième année

AUTOMATIQUE
ANALYSE ET COMMANDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS OU ÉCHANTILLONNÉS

(Notes de cours et TD autorisées)

Sujet volontairement long[1] pour permettre à chacun d'engranger un maximum de points (barême > 20).
Les 2 exercices sont indépendants.
Quasiment toutes les questions peuvent être traitées séparément les unes des autres.
Les calculs doivent être détaillés au maximum.

Exercice 1 : (12 points)

On considère un processus continu du 1er ordre de gain statique 1 et de constante de temps τ. On réalise la boucle numérique d'asservissement de la figure 1.
Par la suite, on désignera par T la période d'échantillonnage et on posera $\alpha = e^{-\frac{T}{\tau}}$.

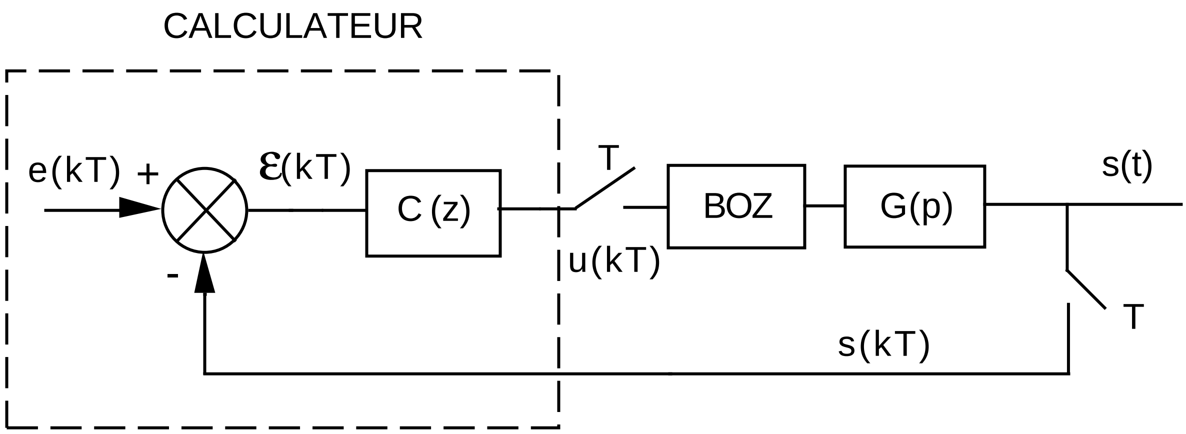

FIG. 1 –

1.1) Calculer la fonction de transfert numérique équivalente au processus continu précédé du bloqueur d'ordre zéro. On désignera cette fonction de transfert par $G_e(z)$.

[1] l'énoncé est long mais les réponses sont souvent très courtes.

1.2) En désignant par $E(z)$ la transformée en z de l'entrée et par $H(z)$ la FTBF du système bouclé, exprimer $U(z)$ en fonction de $G_e(z)$, $H(z)$ et $E(z)$.

1.3) Exprimer $C(z)$ en fonction de $G_e(z)$ et $H(z)$.

On souhaite synthétiser un correcteur numérique $C(z)$ tel que le système bouclé se comporte comme un <u>système du 1^er ordre</u> de gain statique 1 et de constante de temps τ' ($\tau' < \tau$), soit :

$$H(z) = \frac{1-\beta}{z-\beta} \qquad \text{avec } \beta = e^{-\frac{T}{\tau'}}$$

Par la suite, on posera : $x = \dfrac{T}{\tau'}$.

1.4) Quelle condition sur x est imposée par le théorème de Shannon ?

1.5) Calculer $C(z)$ en fonction de α et β.

1.6) En déduire l'équation récurrente à programmer dans l'ordinateur pour réaliser la commande souhaitée.

1.7) Calculer $U(z)$ en fonction de α, β et $E(z)$.

1.8) Dans le cas où l'entrée est un échelon d'amplitude E_0, calculer $u(0)$ (par exemple, en appliquant le théorème de la valeur initiale).

En posant $a = \dfrac{\tau}{\tau'}$, montrer que :

$$u(0) = \frac{1-e^{-x}}{1-e^{-\frac{x}{a}}}\, E_0$$

On admettra pour la suite que $u(0)$ est la valeur maximale de $u(k)$, que l'on notera u_{max}.

L'abaque de la figure 2, représente la fonction :

$$f_a(x) = \frac{1-e^{-x}}{1-e^{-\frac{x}{a}}}$$

pour différentes valeurs de a.

Application : la constante de temps du processus est $\tau = 1\,s$. Le système bouclé doit avoir une constante de temps $\tau' = 0,125\,s$. Le signal de commande en réponse à un échelon E_0 doit être inférieur à $6,5\,E_0$ (i.e. $u_{max} = 6,5\,E_0$).

1.9) En utilisant l'abaque de la figure 2, déterminer la fréquence d'échantillonnage maximale qui permet de satisfaire au cahier des charges.

On veut maintenant que $\tau' = \dfrac{\tau}{10}$ avec $\tau = 1\,s$. On impose une fréquence d'échantillonnage de $100\,Hz$.

1.10) Quelle sera la valeur maximum du signal de commande ?

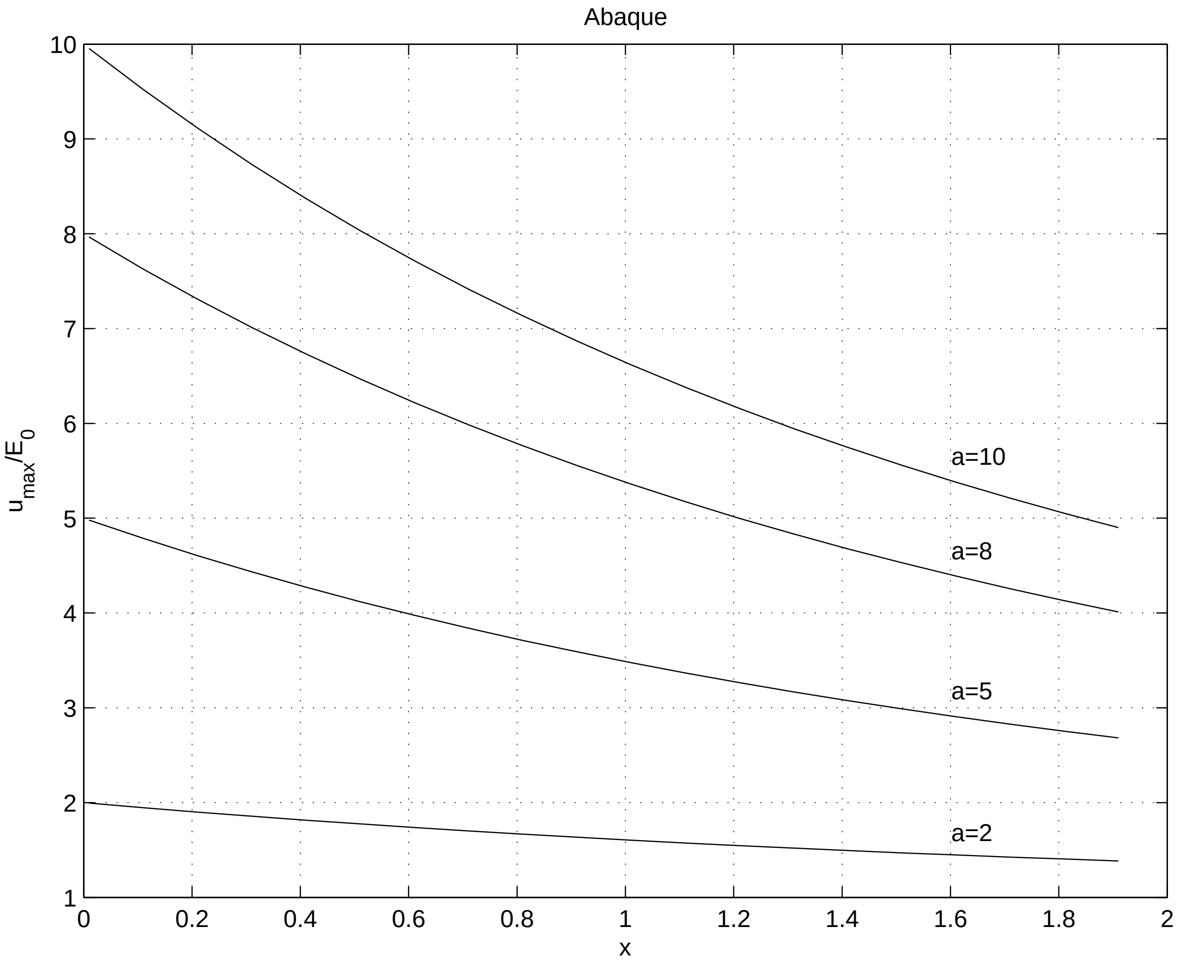

FIG. 2 – Abaque

Exercice 2 : (12 points)

On considère le système de la figure 3 constitué d'une bille en mouvement sur une barre orientable dans le plan vertical dont on peut modifier l'inclinaison (β) par l'intermédiaire d'un moteur à courant continu couplé à un réducteur (motoréducteur).

On souhaite stabiliser la position (x) de la bille à une position de consigne donnée.

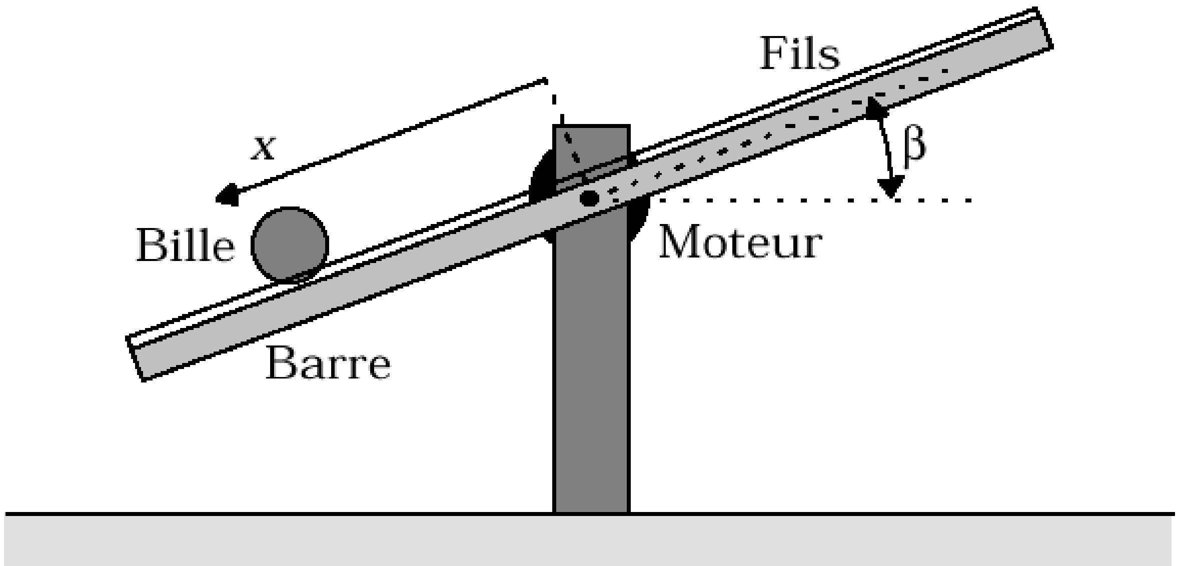

Fig. 3 – Asservissement de position d'une bille sur un rail

La barre est un profilé en T pouvant pivoter autour d'un axe central. Un potentiomètre est monté sur ce même axe et permet de mesurer la position angulaire de la barre. La bille métallique roule sur deux fils conducteurs tendus entre les extrémités de la barre (cf. Figure 4). Ces deux fils et la bille forment un pont de résistances permettant une mesure de la position.

La modélisation du sous-système **motoréducteur-barre** conduit à la fonction de transfert (classique) reliant la tension de commande u du moteur à la position angulaire β de la barre :

$$\frac{\beta(p)}{U(p)} = \frac{K_m}{p(1 + T_m\, p)} \tag{1}$$

où K_m est le gain statique et T_m la constante de temps mécanique.

On prendra $K_m = 2$ tr·mn^{-1}·V^{-1} et $T_m = 60$ ms.

Le modélisation du sous-système **barre-bille** est plus délicate. Elle conduit à l'équation différentielle non-linéaire suivante :

$$\left(m + \frac{I_b}{r^2}\right)\ddot{x} + \left(\frac{I_b}{r^2}\right)\ddot{\beta} - m\,x\,\dot{\beta}^2 = m\,g\,\sin\beta \tag{2}$$

où m et I_b désignent respectivement la masse et l'inertie de la bille. r désigne le rayon effectif de la bille pour le roulement (cf. Figure 4). g est l'accélération de la pesanteur.

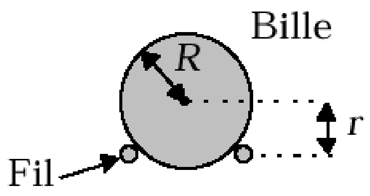

FIG. 4 – Géométrie de la bille (vue transversale à l'axe de la barre)

En supposant que de faibles variations de l'angle β sont suffisantes pour stabiliser la bille en un point donné de la barre, on peut linéariser l'équation (2), ce qui conduit à la relation :

$$\left(m + \frac{I_b}{r^2}\right)\ddot{x} = m\,g\,\beta \tag{3}$$

La bille étant une sphère pleine de rayon R, son inertie est donnée par :

$$I_b = \frac{2}{5} m\,R^2$$

L'équation (3) peut s'écrire alors :

$$\left(1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right)\ddot{x} = g\,\beta \tag{4}$$

Finalement, les équations (1) et (4) fournissent un modèle linéaire du système complet.

Par la suite, **on posera** :

$$K_b = \frac{g}{1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{r}\right)^2}$$

On prendra $K_b = 0{,}2$ m/rad.

2.1) Calculer la fonction de transfert $\dfrac{X(p)}{\beta(p)}$ du sous-système barre-bille. Quel est le type de cette fonction de transfert ?

2.2) Calculer la fonction de transfert $\dfrac{X(p)}{U(p)}$ du système complet. Donner son ordre, sa classe, son gain statique.

2.3) Donner la représentation d'état du système complet en utilisant comme variables d'état (dans l'ordre) : la position de la bille (x), sa vitesse ($\dot{x}$), l'angle de la barre (β), sa vitesse angulaire ($\dot{\beta}$). La sortie du système est la position de la bille.

2.4) Montrer qu'en prenant le vecteur d'état $\begin{pmatrix} x & \dot{x} & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T$ avec $x_3 = K_b\,\beta$ et $x_4 = K_b\,\dot{\beta}$, on obtient une représentation d'état sous **forme compagne de commandabilité**.

2.5) Calculer le correcteur par retour d'état qui permet d'avoir un système en boucle fermée avec 2 pôles réels (constante de temps 1 s) et 2 pôles complexes conjugués correspondant à un 2ème ordre d'amortissement $\zeta = 0,7$ et de pulsation propre $w_n = 0,2$ rad/s, i.e. :

$$H(p) = \frac{N(p)}{(1+p)^2(1+\frac{2\zeta}{w_n}p+\frac{p^2}{w_n^2})}$$

Pour réduire les calculs au strict minimum, on utilisera bien sûr la forme de commandabilité de la question 2.4).