École des Mines d'Albi-Carmaux — Décembre 2006

Formation Initiale 3ième année

AUTOMATIQUE
ANALYSE ET COMMANDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS OU ÉCHANTILLONNÉS

(Notes de cours et TD autorisées)

Sujet volontairement long pour balayer plusieurs aspects du cours (barême > 20).
Les 3 exercices sont indépendants.
Quasiment toutes les questions peuvent être traitées séparément les unes des autres.
Les calculs doivent être détaillés au maximum.

Exercice 1 : (18 points)

On considère un processus continu d'ordre 1 de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{10}{1 + 15\,p}$$

On se propose d'étudier la commande numérique de ce processus continu suivant le schéma de la figure 1, où $G_c(z)$ désigne le correcteur numérique choisi.

On choisit une période d'échantillonage de $T = 1\,s$.

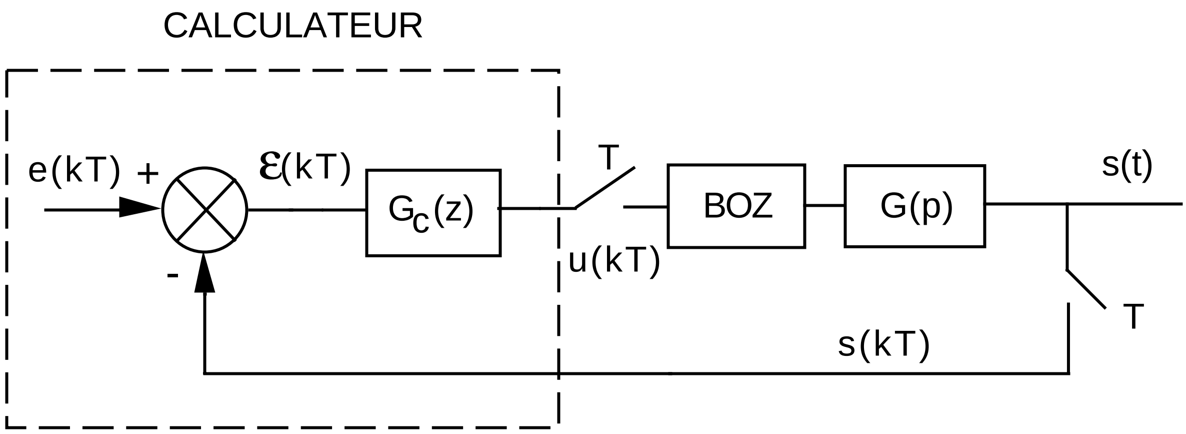


FIG. 1 –

On rappelle (ne pas le démontrer) que la fonction de transfert en z équivalente au processus continu précédé du bloqueur d'ordre zéro est égale à :

$$G_e(z) = 10\,\frac{1-a}{z-a} \qquad \text{avec} \qquad a = e^{-\frac{T}{15}}$$

<u>1ère partie</u>[1] :

Dans un premier temps, on choisit un correcteur $G_c(z)$ de type proportionnel de gain K_p, avec $K_p > 0$.

On rappelle (ne pas le démontrer) que la FTBF du système peut s'écrire sous la forme :

$$H_{BF}(z) = \frac{10\,K_p}{1+10\,K_p}\,\frac{1-\alpha}{z-\alpha}$$

avec $\alpha = a - 10\,K_p(1-a)$.

Pour étudier la stabilité du système en boucle fermée, on va analyser le lieu des racines du système (i.e. le lieu des pôles de la FTBF lorsque K_p varie de 0 à $+\infty$), fourni Figure 2.

1.1) Quels sont les pôles de la FTBF ? Combien y en a-t-il ?
Vérifier la cohérence avec le lieu des racines.

1.2) Est-ce que la stabilité dépend de la valeur de K_p ?
Expliquer.

1.3) Quel est le domaine de variation de K_p ($K_{p_{min}}$, $K_{p_{max}}$) qui garantit la stabilité du système en boucle fermée ?

1.4) On montre que la réponse indicielle du système en boucle fermée est :

a) stable et apériodique si le pôle est stable et positif.

b) stable mais oscillatoire si le pôle est stable et négatif.

Quels sont les 2 domaines de variation de K_p ($K_{p_{min}}$, $K_{p_{max}}$) qui correspondent à chacun de ces 2 régimes transitoires ?

1.5) Le système en boucle fermée est-il précis ?
Calculer la valeur de régime permanent en réponse à une entrée de type échelon unité.

[1] Les 3 parties sont indépendantes.

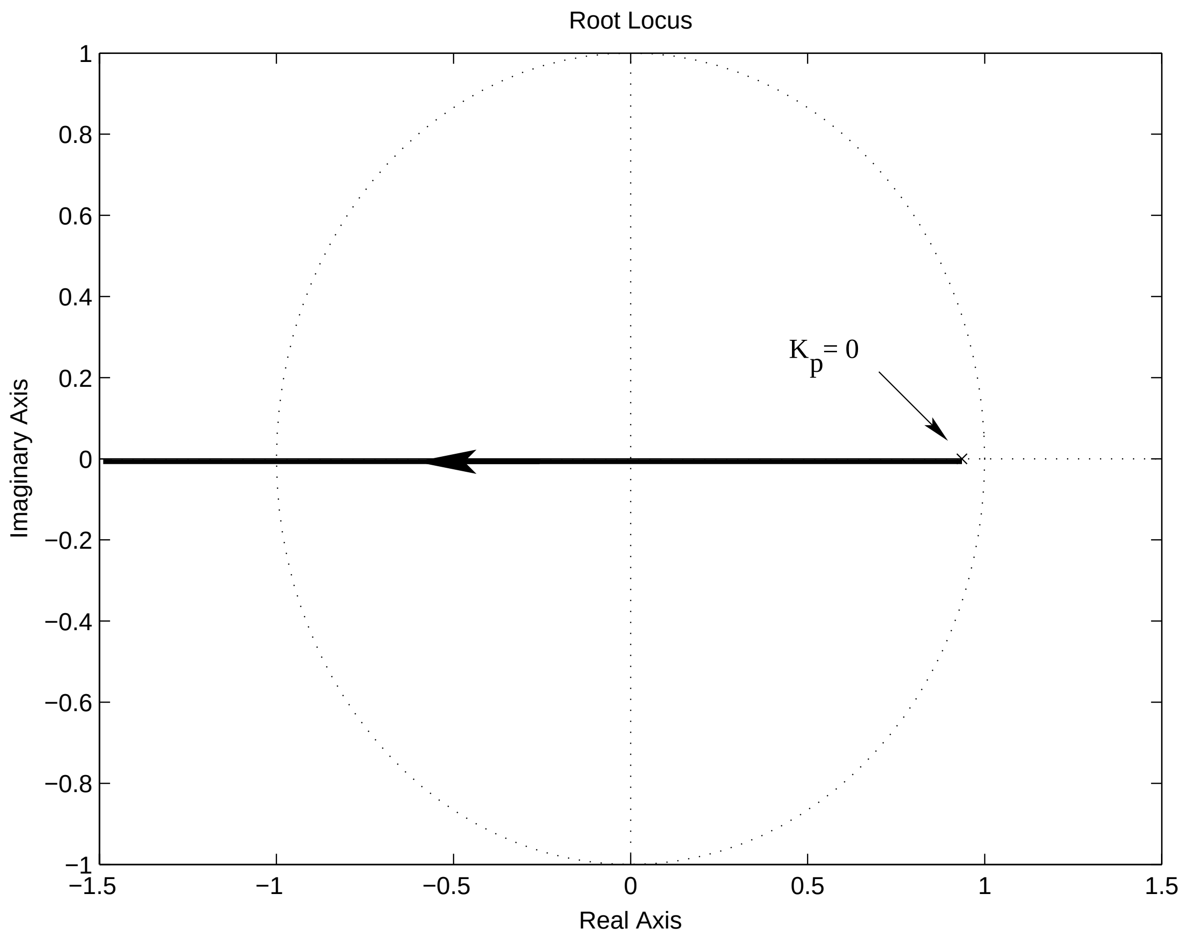


Fig. 2 – Lieu des racines de la FTBF

2ème partie :

Dans un deuxième temps, on choisit un correcteur $G_c(z)$ de type proportionnel intégral de fonction de transfert $K_p + K_i \dfrac{z}{z-1}$.

1.6) Déterminer l'équation récurrente qui permet au correcteur de calculer les échantillons de commande $u(kT)$ à partir des échantillons du signal d'erreur $\varepsilon(kT)$.

1.7) Montrer que la FTBF du système peut s'écrire sous la forme :

$$H_{BF}(z) = 10\,\frac{((K_p + K_i)\,z - K_p)(1-a)}{(z-1)(z-a) + 10\,(1-a)((K_p + Ki)\,z - K_p)}$$

1.8) Calculer le polynôme caractéristique de ce système et, en appliquant le critère de ROUTH sur le polynôme en w, chercher les valeurs de K_p et K_i pour lesquelles le système en boucle fermée est stable.

NB : le calcul n'est pas très compliqué si on procède avec méthode : écrire le polynôme en z sous la forme $z^2 - A\,z + B = 0$, écrire les conditions sur A et B, et en déduire les conditions sur K_p et K_i.

1.9) Parmi les 4 domaines de stabilité de la figure 3, quel est le domaine de stabilité correct ?

3ème partie :

Dans un troisième temps, on met en place le correcteur numérique suivant, qui a été calculé de manière à ce que le système en boucle fermée présente un comportement type "2ème ordre" :

$$G_c(z) = 0.01\,\frac{(z+1)}{z^2 - 1.5\,z + 0.5}\,\frac{z-a}{1-a}$$

1.10) Vérifier que la FTBF correspond bien à un système numérique du 2ème ordre.

1.11) En utilisant les abaques, en déduire les performances du système en réponse à un échelon de consigne :

a) gain statique (conclure sur la précision)

b) valeur du dépassement

c) temps du premier maximun

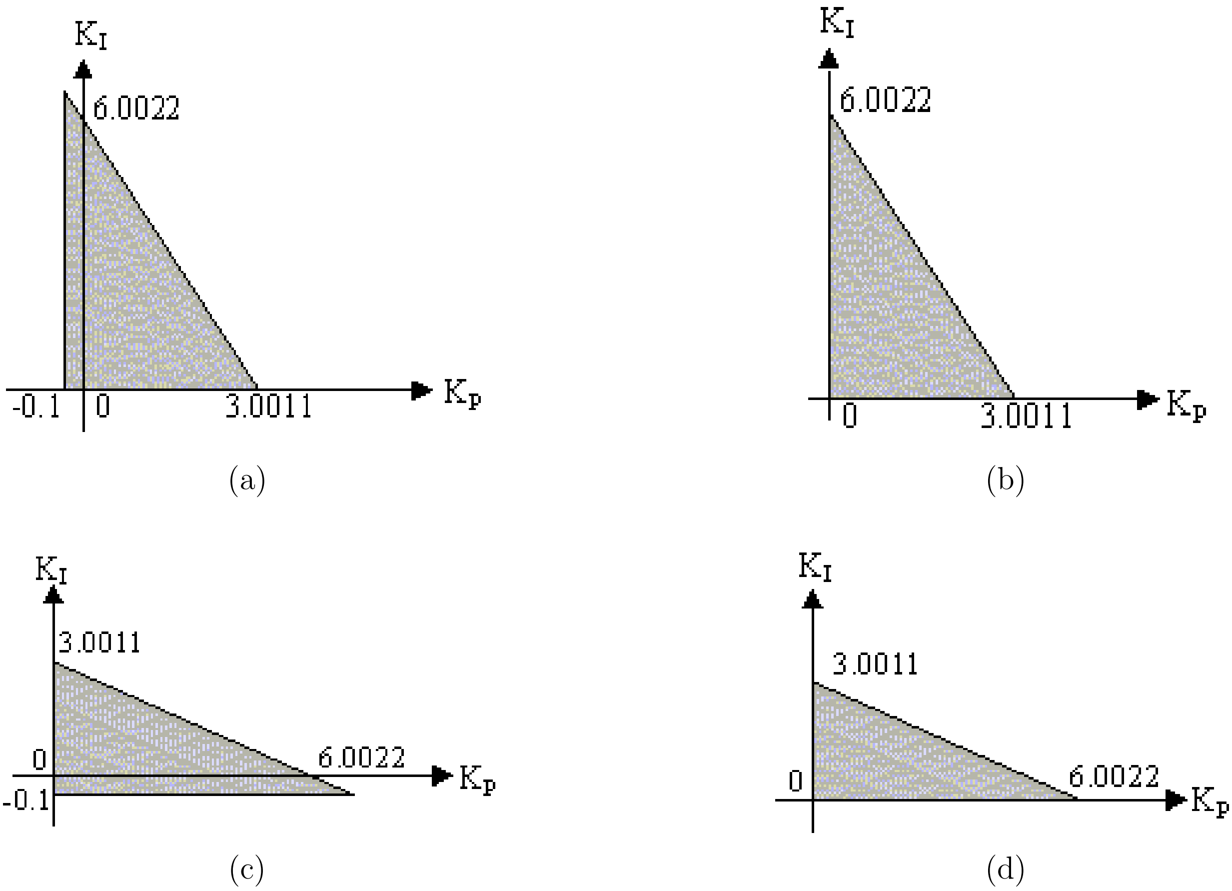


Fig. 3 – Domaines de stabilité (valeurs admissibles pour K_p et K_i)

Exercice 2 : (3 points)

Soit le système continu dont une représentation d'état est donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

Lorsqu'on effectue une commande par retour d'état de ce système avec le vecteur de commande $K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, les pôles de la boucle fermée valent $-2 \pm j$.

2.1) En déduire les valeurs de α et β.

Exercice 3 : (7 points)

On considère un procédé continu de fonction de transfert :

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{p^2 + 5\,p + 6}$$

3.1) Donner la représentation d'état (A, B, C, D) du procédé correspondant au vecteur d'état défini par :

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$$

On place ce procédé dans une boucle fermée à retour unitaire, avec un correcteur de fonction de transfert $C(p) = K\,\dfrac{p+3}{1+T\,p}$, selon le schéma de la figure 4.

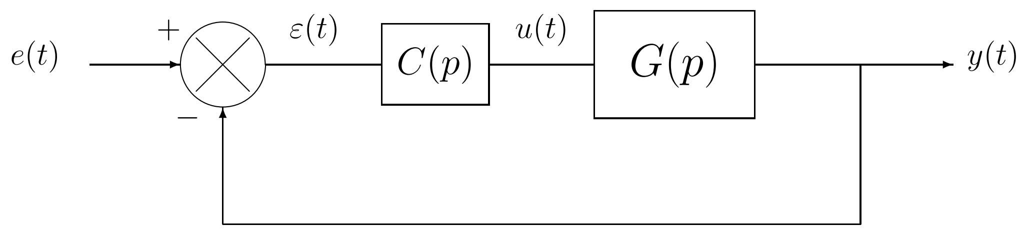
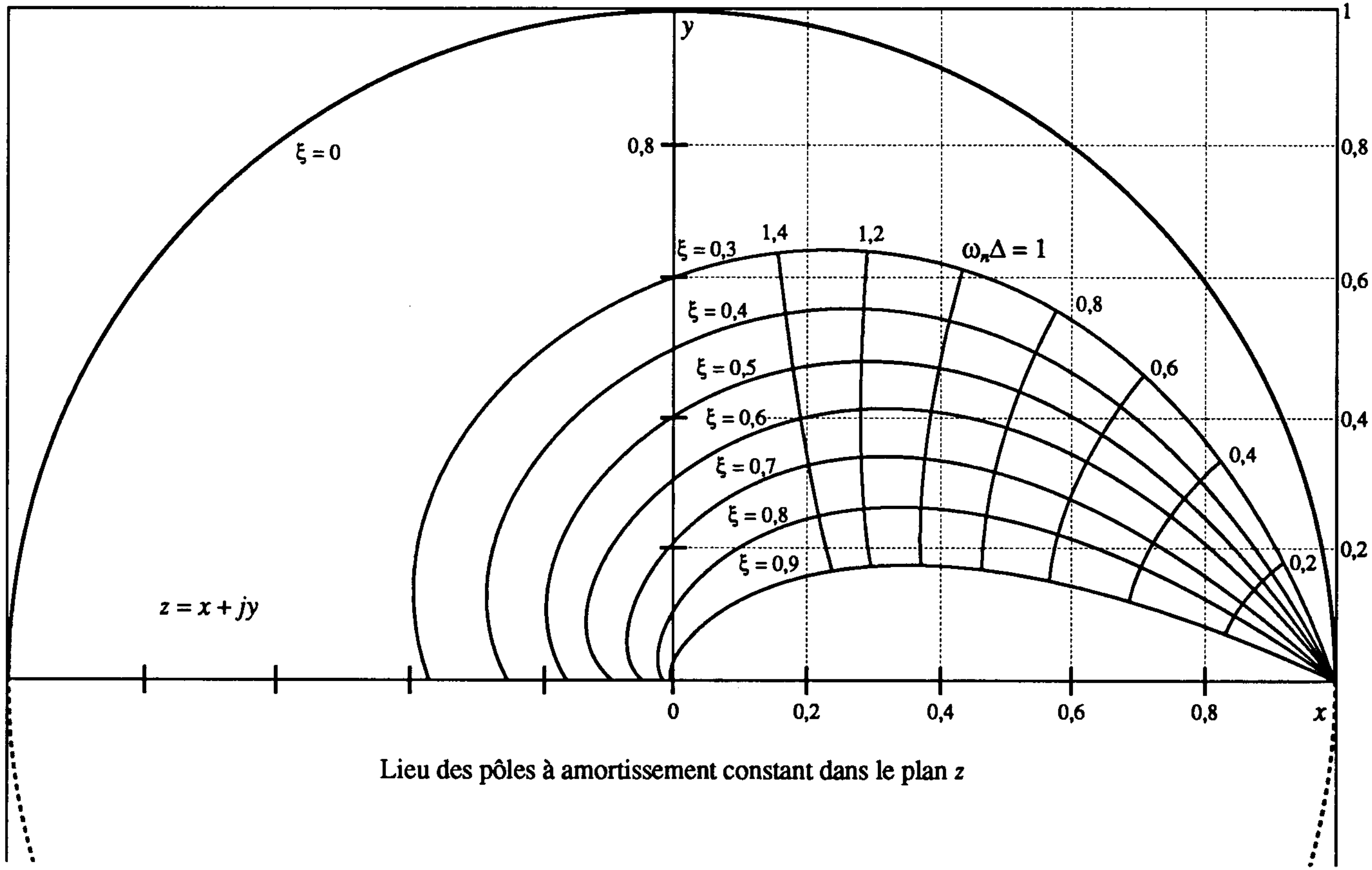


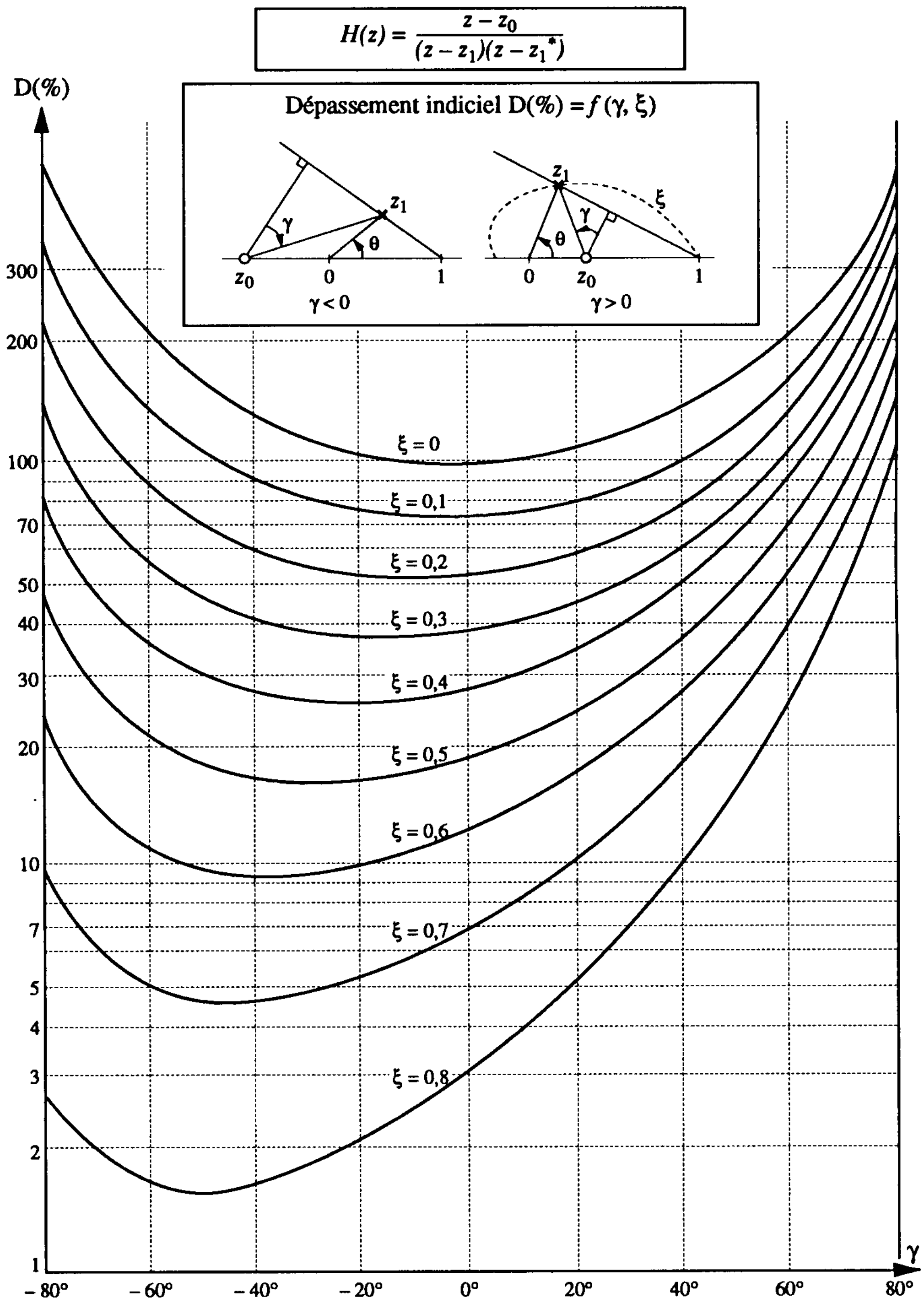
FIG. 4

3.2) Calculer les valeurs des paramètres K et T pour que le correcteur $C(p)$ conduise à une équation caractéristique en boucle fermée identique à celle qui serait obtenue si on réalisait une commande par retour d'état avec le vecteur de commande $K = \begin{bmatrix} 42 & 9 \end{bmatrix}$ (i.e. mêmes pôles en boucle fermée).

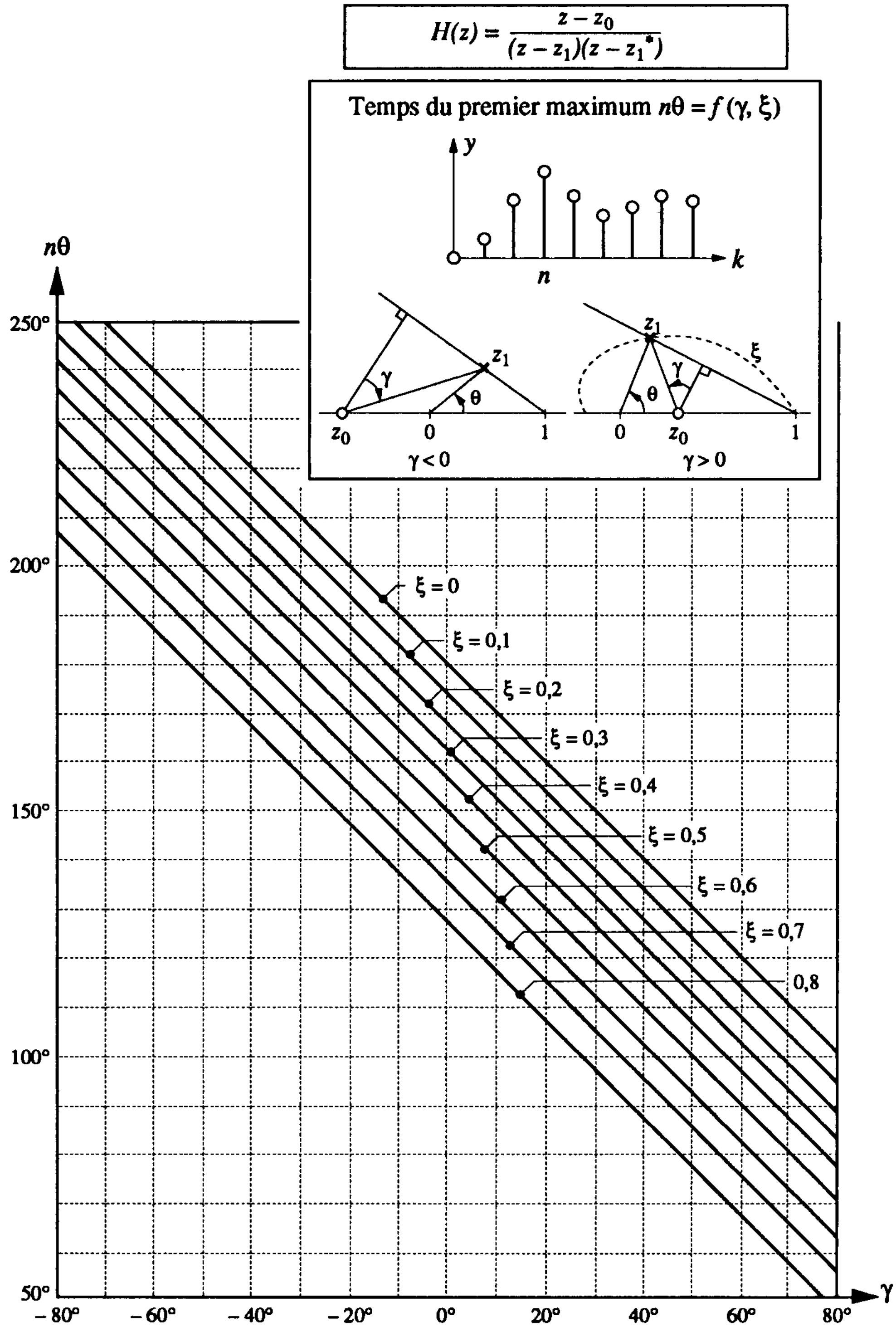
3.3) Étudier la précision du système bouclé vis-à-vis d'un échelon de consigne.



Lieu des pôles à amortissement constant dans le plan z



$H(z) = \frac{z - z_0}{(z - z_1)(z - z_1^*)}$
Dépassement indiciel D(%) = f (γ, ξ)
D(%)
z_1
γ
θ
z_0
0
1
γ < 0
ξ
γ > 0
ξ = 0
ξ = 0,1
ξ = 0,2
ξ = 0,3
ξ = 0,4
ξ = 0,5
ξ = 0,6
ξ = 0,7
ξ = 0,8
300
200
100
70
50
40
30
20
10
7
5
4
3
2
1
– 80°
– 60°
– 40°
– 20°
0°
20°
40°
60°
80°



$H(z) = \frac{z - z_0}{(z - z_1)(z - z_1^*)}$
Temps du premier maximum $n\theta = f(\gamma, \xi)$
y
k
n
z_1
γ
θ
z_0
0
1
$\gamma < 0$
ξ
$\gamma > 0$
$n\theta$
250°
200°
150°
100°
50°
$\xi = 0$
$\xi = 0,1$
$\xi = 0,2$
$\xi = 0,3$
$\xi = 0,4$
$\xi = 0,5$
$\xi = 0,6$
$\xi = 0,7$
0,8
– 80°
– 60°
– 40°
– 20°
0°
20°
40°
60°
80°
γ