École des Mines d'Albi-Carmaux — Mai 2006
Formation Initiale 3ième année

AUTOMATIQUE
ANALYSE ET COMMANDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES
CONTINUS OU ÉCHANTILLONNÉS
(Notes de cours et TD autorisées)

ÉPREUVE DE RAPPEL

– *Les 4 exercices sont indépendants* –

Les calculs doivent être détaillés au maximum.

L'examinateur sympa rappelle qu'un déterminant d'ordre 3 se calcule de la façon suivante :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33}+a_{12}\,a_{23}\,a_{31}+a_{13}\,a_{21}\,a_{32}-a_{11}\,a_{23}\,a_{32}-a_{12}\,a_{21}\,a_{33}-a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$$

Exercice 1 :

On considère le système asservi de la figure 1, où D désigne une perturbation.

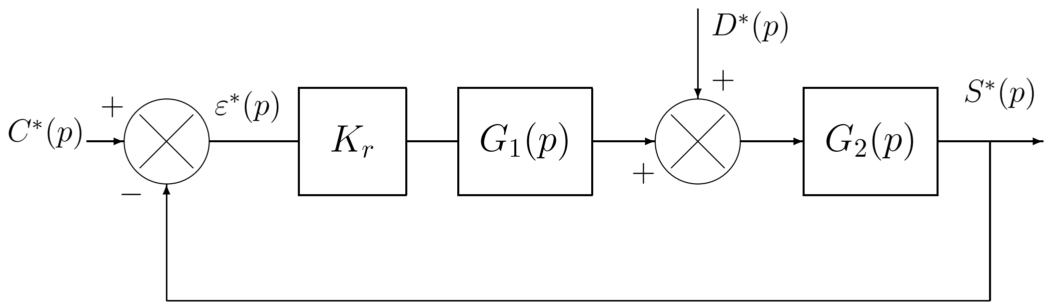

Fig. 1 – Un système asservi avec perturbation.

On donne $G_1(p) = \dfrac{10}{1+p}$ et $G_2(p) = \dfrac{5}{1+2\,p}$.

K_r désigne le gain d'un régulateur proportionnel.

1.1) Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO).

1.2) Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $\mathrm{FTBF}_1 = \left.\dfrac{S^*(p)}{C^*(p)}\right|_{d^*(t)=0}$.

Par quel nom désigne-t-on cette fonction de transfert ?

1.3) Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $\mathrm{FTBF}_2 = \left.\dfrac{S^*(p)}{D^*(p)}\right|_{c^*(t)=0}$.

Par quel nom désigne-t-on cette fonction de transfert ?

1.4) En l'absence de perturbation, si la consigne varie sous forme d'un échelon unitaire, déterminer la valeur de la précision en régime permanent $\varepsilon^*(+\infty)$.

1.5) Pour une consigne constante, calculer de combien varie la sortie en régime permanent sous l'action d'une perturbation qui varie sous forme d'un échelon unitaire.

1.6) Commenter les résultats des questions 1.4) et 1.5).

<u>Exercice 2</u> :

La figure 2 représente les diagrammes de Black de deux systèmes dynamiques.

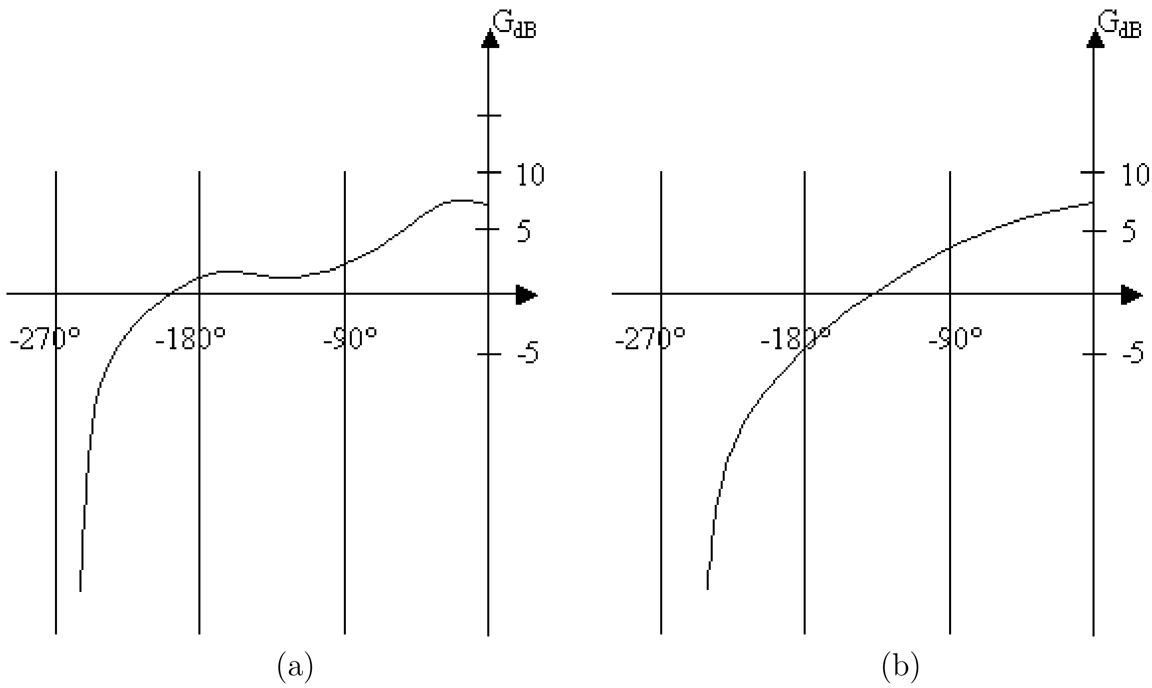

Fig. 2 – (a) Système 1 – (b) Système 2

Pour chacun de ces systèmes, préciser :

2.1) si le système est stable ou instable en boucle fermée,

2.2) la marge de phase et la marge de gain, si elles existent (si elles n'existent pas, on le précisera),

2.3) la valeur qu'il faut donner au gain d'un régulateur proportionnel pour procurer au système contrôlé une marge de gain de 15 dB.

Exercice 3 :

On considère le système de la figure 3-a qui correspond à un processus continu en boucle ouverte.

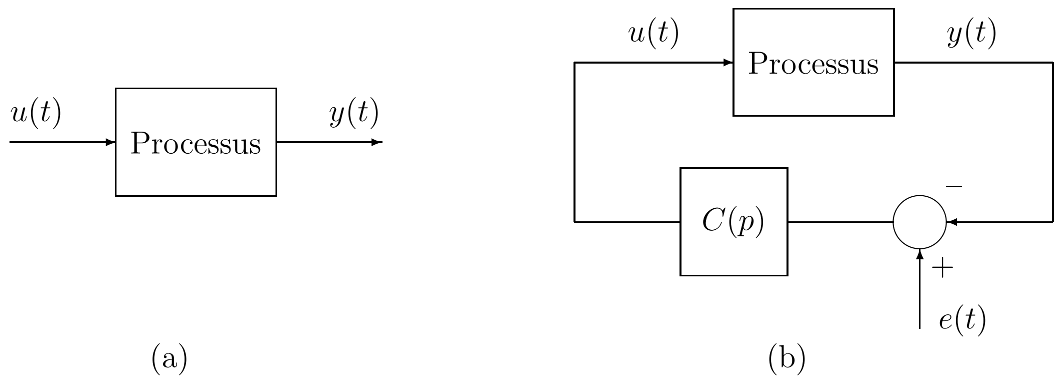

FIG. 3 – (a) Processus continu en boucle ouverte – (b) Processus continu dans une boucle analogique d'asservissement où $C(p)$ désigne le correcteur.

Le processus étudié a pour fonction de transfert $G(p) = \dfrac{1}{p^2}$.

Dans un premier temps, on envisage de piloter le système par une boucle d'asservissement analogique (cf. Figure 3-b) et une **commande proportionnelle**.

3.1) Expliquer pourquoi cette façon de procéder est vouée à l'échec.

Dans un deuxième temps, plutôt que de poursuivre dans la voie «commande analogique», on décide de piloter le processus continu par une **boucle numérique d'asservissement** selon le schéma de la figure 4.
On choisit une fréquence d'échantillonnage de $1\,Hz$.

Le correcteur numérique choisi a pour fonction de transfert :

$$C(z) = 0,374\,\frac{z - 0,85}{z}$$

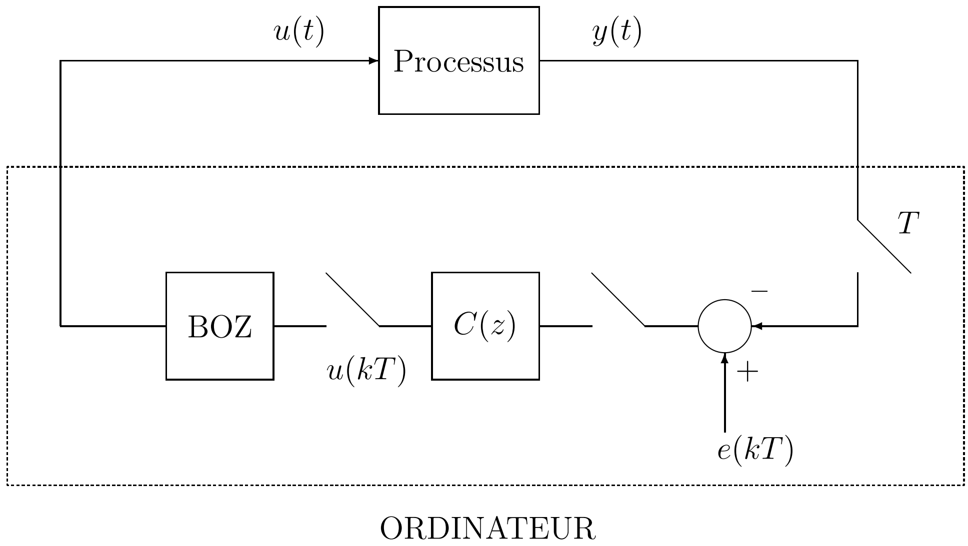

Fig. 4 – Processus continu dans une boucle numérique d'asservissement

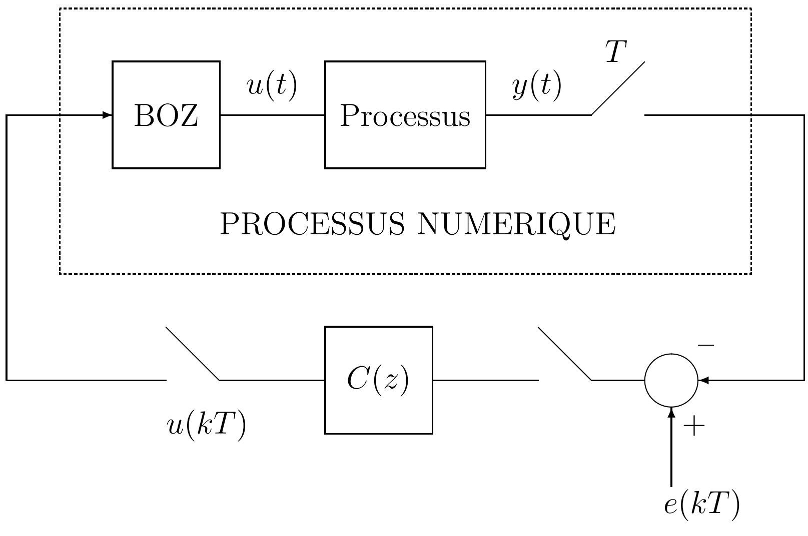

Fig. 5 – Processus continu dans une boucle numérique d'asservissement

3.2) À partir de l'expression du correcteur numérique utilisé, donner l'équation récurrente permettant de calculer les échantillons de commande numérique $u(kT)$.

3.3) Calculer la fonction de transfert en Z du **processus numérique équivalent** au processus continu $G(p)$ muni de son BOZ et échantillonné à la période T (cf. Figure 5).

3.4) En déduire la fonction de transfert numérique $\dfrac{Y(z)}{E(z)}$ en boucle fermée.
Donner son gain statique (justifier le résultat).

Exercice 4 :

On veut commander le niveau d'eau dans un réservoir à l'aide d'une vanne qui permet de modifier le débit de sortie. L'entrée $u(t)$ désigne la commande du moteur électrique de la vanne, la variable $z(t)$ la position de la vanne et la sortie $y(t)$ l'écart entre le remplissage du réservoir et le remplissage nominal. En l'absence de perturbation, le modèle de ce système est décrit par les équations différentielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{z}(t) + \tau\, \ddot{z}(t) = u(t) \\ \dot{y}(t) = \beta\, z(t) \end{array} \right.$$

où τ et β sont deux constantes positives.

4.1) Donner une représentation d'état (A, B, C, D) de ce système en considérant le vecteur d'état suivant :

$$x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

4.2) Déterminer les pôles du système et discuter sa stabilité.

4.3) Montrer que le système est commandable.

On envisage une commande par retour d'état avec une loi de commande de la forme $u(t) = Nr(t) - Kx(t)$ où $r(t)$ représente le signal de consigne, K le gain de retour d'état et N est un scalaire permettant de régler le gain statique du système asservi.

On souhaite les caractéristiques suivantes pour l'asservissement :

a) $-\dfrac{1}{\tau}$ pôle simple et $-\dfrac{1}{\tau_c}$ pôle double,

b) erreur nulle en régime permanent pour une consigne $r(t)$ de type échelon de position.

4.4) Calculer le vecteur de retour d'état K qui répond à l'exigence a) du cahier des charges.

4.5) Calculer le gain N qui répond à l'exigence b) du cahier des charges.

4.6) Après avoir calculé les expressions littérales de K et de N, faire une application numérique avec $\beta = 1$, $\tau = 0.5$ et $\tau_c = 0.2$.

4.7) Esquisser l'allure de la réponse de l'asservissement à une consigne $r(t)$ de type échelon unitaire de position.
NB : question indépendante des questions 4.4) et 4.5).