École des Mines d'Albi-Carmaux — Décembre 2002
Formation Initiale 3ième année

AUTOMATIQUE
ANALYSE ET COMMANDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS OU ÉCHANTILLONNÉS

(Notes de cours et TD autorisées)

– Les 5 exercices sont indépendants –

Les calculs (surtout les calculs matriciels) doivent être détaillés au maximum.

Exercice 1 :

On considère le schéma de commande numérique[1] de la figure 1.
Donner l'équation récurrente qui permet à l'ordinateur de calculer le signal de commande numérique $\{u(k)\}$ à partir du signal d'entrée $\{e(k)\}$ et du signal de sortie $\{s(k)\}$.

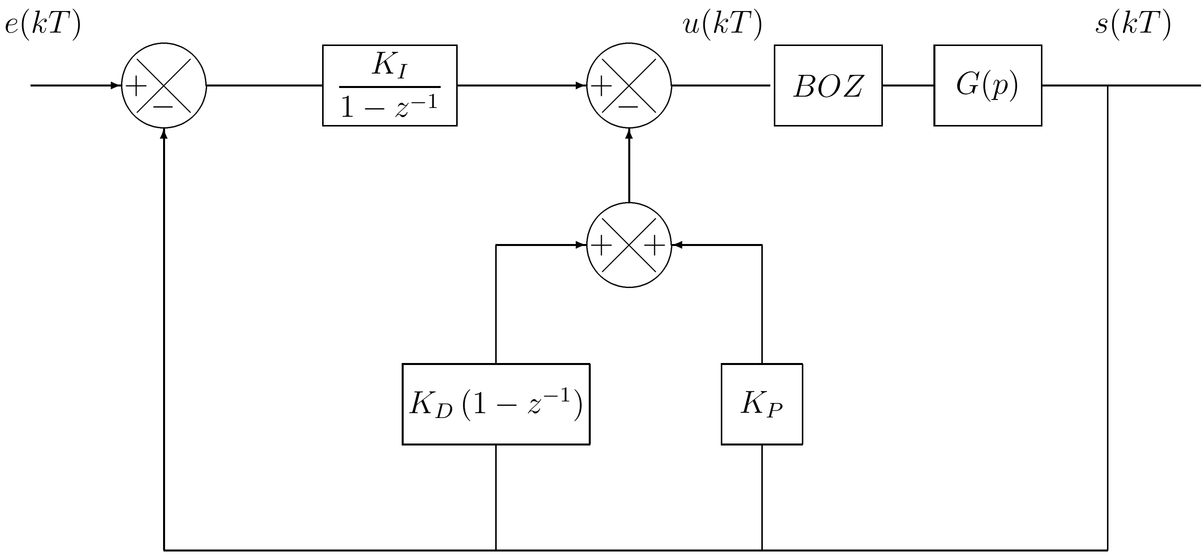

Fig. 1 – *Un schéma de commande numérique de type PID*

1. Pour simplifier le schéma, l'échantillonneur a été omis et les fils sont en trait continu même lorsqu'ils véhiculent un signal échantillonné.

Exercice 2 :

Calculer le signal numérique $x(k)$ solution de l'équation suivante :

$$x(k+2) + 3\,x(k+1) + 2\,x(k) = 0 \qquad \text{avec} \qquad x(0) = 0 \quad , \quad x(1) = 1$$

Exercice 3 :

On considère le système échantillonné de la figure 2 avec :

$$G(z) = \frac{0{,}3679\,z + 0{,}2642}{(z - 0{,}3679)(z - 1)}$$

Le correcteur $C(z)$ utilisé est de type proportionnel. On note K son gain.

Calculer la condition que doit vérifier K pour que le système en boucle fermée soit stable.

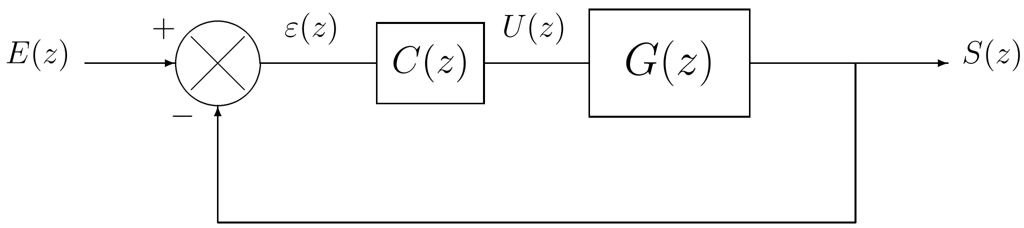

FIG. 2 –

Exercice 4 :

On considère le circuit électrique de la figure 3.

On désigne par $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les tensions aux bornes des condensateurs.

On choisit le vecteur d'état :

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

4.1) Écrire la représentation d'état du système d'entrée $u(t)$ et de sortie $s(t)$, à partir

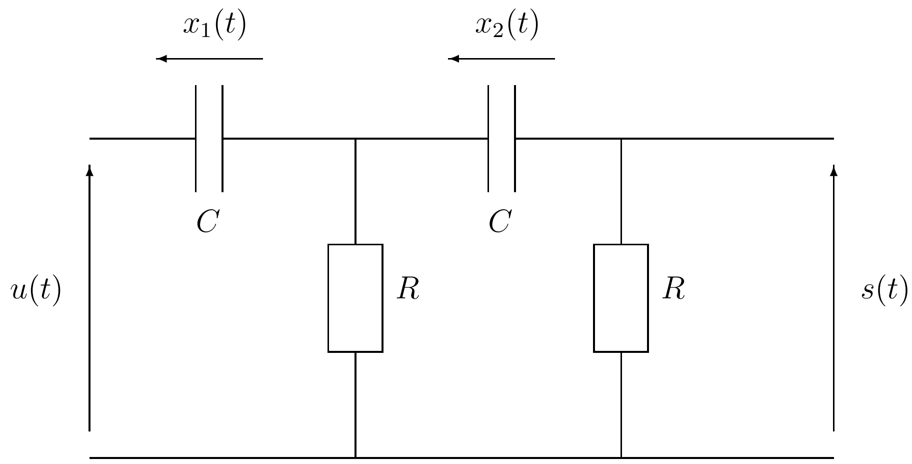

FIG. 3 –

des équations du circuit [2] :

$$
\begin{aligned}
s(t) &= u(t) - x_1(t) - x_2(t) \\
\frac{dx_1}{dt} &= \frac{-2}{RC}\,x_1 - \frac{1}{RC}\,x_2 + \frac{2}{RC}\,u \\
\frac{dx_2}{dt} &= \frac{-1}{RC}\,x_1 - \frac{1}{RC}\,x_2 + \frac{1}{RC}\,u
\end{aligned}
$$

4.2) En déduire la fonction de transfert du système $\dfrac{S(p)}{U(p)}$.

<u>Exercice 5</u> :

On considère le système de la figure 4.

On désigne par S_1 et S_2 les surfaces des réservoirs, et par R_1 et R_2 les résistances à l'écoulement $\left(q = \dfrac{h}{R}\right)$.

Pour les applications numériques, on prendra :

$$S_1 = 1\,m^2 \quad , \quad S_2 = \frac{1}{2}\,m^2 \quad , \quad R_1 = \frac{1}{2}\,min/m^2 \quad , \quad R_2 = \frac{2}{3}\,min/m^2$$

Dans tout l'exercice, les variables h_1, h_2 et q_1 désignent des variables d'écart par rapport au point de fonctionnement choisi.

2. L'examinateur est vraiment sympa de fournir ces équations !

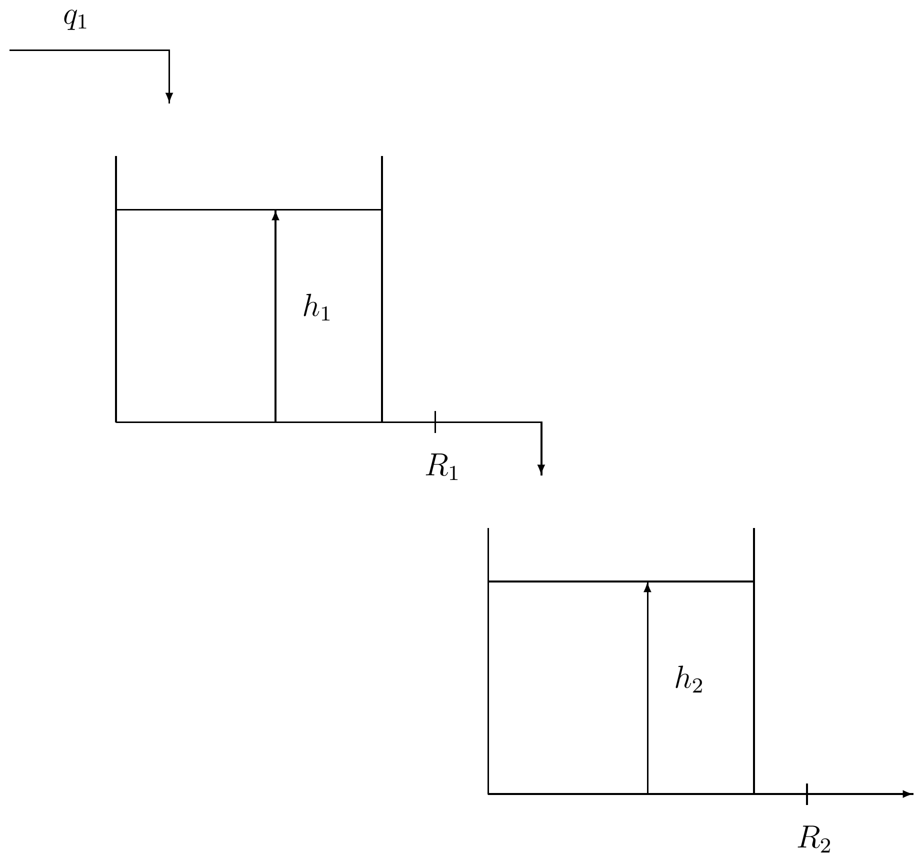

FIG. 4 –

5.1) Écrire les équations différentielles qui régissent le fonctionnement de ce système.

5.2) Écrire la représentation d'état correspondant au choix suivant (*application numérique*) :

$$\text{entrée } q_1 \qquad , \qquad \text{état } x = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \qquad , \qquad \text{sortie } y = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

À partir d'ici, on ne travaille que sur les expressions numériques des matrices A, B, C et D.

5.3) Calculer la matrice de transfert de ce système multivariable.
En déduire la fonction de transfert $\dfrac{H_2(p)}{Q_1(p)}$. Quels sont les pôles du système en boucle ouverte ?

À partir d'ici, on considère le **système monovariable** d'entrée q_1 et de sortie h_2 en boucle ouverte.

5.4) En désignant par h_c la variation de consigne de niveau souhaitée dans le bac 2, calculer la commande par retour d'état $q_1 = \lambda\, h_c - K\, x$ qui conduit à un système en boucle fermée présentant 1 pôle double en (-3) et une précision statique satisfaisante.

5.5) Compléter le schéma de la figure 4 avec les éléments permettant de mettre en œuvre la commande qui vient d'être calculée.