École des Mines d'Albi-Carmaux Avril 2002
Formation Initiale 3ième année

AUTOMATIQUE
ANALYSE ET COMMANDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES
CONTINUS OU ÉCHANTILLONNÉS
(Notes de cours et TD autorisées)

EPREUVE DE RATTRAPAGE ET DE REMPLACEMENT

– *Les 4 exercices sont indépendants* –

Exercice 1 :

Résolution numérique d'une équation différentielle.

On considère l'équation (1) dont le second membre est l'échelon unitaire $u(t)$.

$$\begin{cases} \tau\,\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \\ y(0^-) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

1.1) Résoudre cette équation à l'aide de la transformée de Laplace.

On discrétise le temps t avec une période d'échantillonnage T, en posant $t = k\,T$ (k entier).
On approxime la dérivée $\dot{y}(t)$ par l'expression :

$$\frac{y(k+1) - y(k)}{T}$$

On a noté $y(k)$ au lieu de $y(kT)$ pour alléger l'écriture.

1.2) Transformer l'équation (1) en équation récurrente en faisant $t = k\,T$ et en utilisant l'approximation de la dérivée proposée (on posera $\alpha = T/\tau$).

1.3) Calculer $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$.

1.4) Résoudre l'équation récurrente en utilisant la transformation en z (on calculera d'abord $Y(z)$ puis sa transformée inverse $y(k)$).

1.5) Comparer le résultat obtenu en 1.4) avec le résultat qui serait obtenu si on discrétisait (en posant $t = k\,T$) le résultat trouvé à la question 1.1).

Exercice 2 :

On considère le processus continu de fonction de transfert $\frac{1}{p}$ (simple intégrateur) d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$.

On numérise ce processus comme indiqué sur la figure 1.

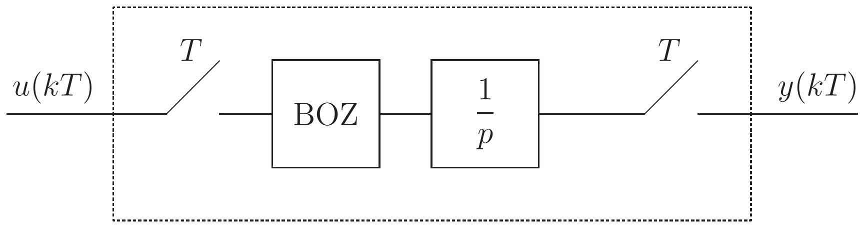

FIG. 1 – *Processus échantillonné*

2.1) À partir de la figure 1, calculer la fonction de transfert $\frac{Y(z)}{U(z)}$ du processus échantillonné.

2.2) Calculer les matrices A, B, C, et D correspondant à la représentation d'état du processus continu d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$, en prenant comme vecteur d'état $x(t) = y(t)$ (attention : x est un scalaire !).

2.3) Écrire la représentation d'état du processus échantillonné d'entrée $u(kT)$ et de sortie $y(kT)$ (matrices F, G, P et Q) et en déduire la fonction de transfert $\frac{Y(z)}{U(z)}$ du processus échantillonné. Comparer avec 2.1).

Exercice 3 :

On considère un pont roulant dont le schéma est représenté sur la figure 2. Un modèle de ce pont roulant peut être obtenu en considérant comme entrée la force horizontale de traction $F(t)$ et comme sortie la position $y(t) = x_p(t)$ du préhenseur.

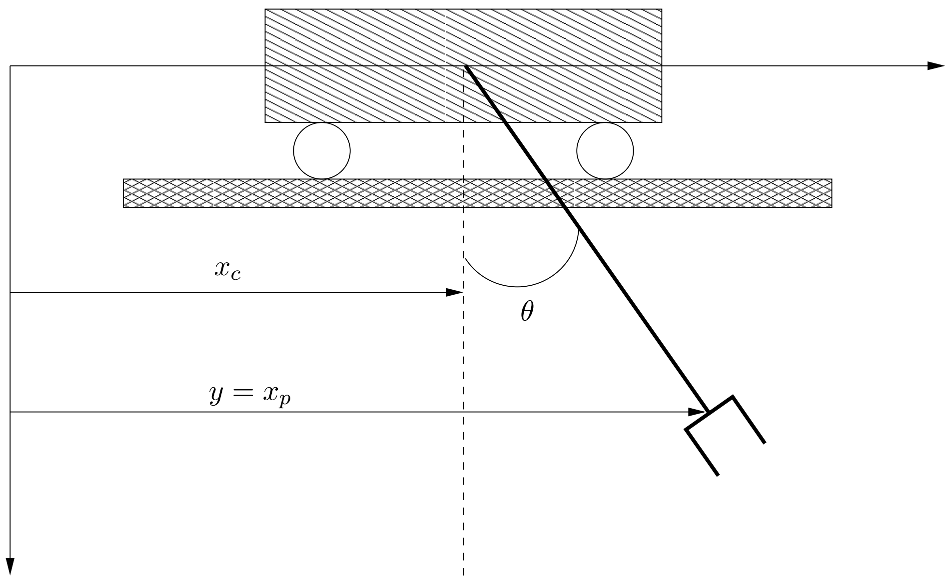

FIG. 2 – *Modélisation d'un pont roulant*

Pour des petites valeurs de l'angle θ, les équations qui modélisent ce pont roulant sont :

$$\begin{aligned}&(m_p + m_c)\ddot{x}_c + m_p l\ddot{\theta} = F \\ &\ddot{x}_c + l\ddot{\theta} + g\theta = 0 \\ &y = x_c + l\theta\end{aligned} \tag{2}$$

l représente la longueur du préhenseur et g l'accélération de la pesanteur.

Pour les applications numériques, on prendra :

$$m_c = 1000\,kg \quad ; \quad m_p = 4000\,kg \quad ; \quad l = 10\,m \quad ; \quad g = 10\,m/s^2$$

3.1) À partir des équations (2), calculer la fonction de transfert du système $\dfrac{Y(p)}{F(p)}$ et montrer que cette fonction de transfert peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{Y(p)}{F(p)} = \frac{K}{p^2(1 + T^2\,p^2)}$$

3.2) Conclure sur la stabilité du système.

3.3) À partir des équations (2), calculer la représentation d'état du système correspondant au vecteur d'état suivant :

$$\begin{pmatrix} x_c \\ \dot{x}_c \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

3.4) Ce système est-il commandable ?