École des Mines d'Albi-Carmaux — Janvier 2002
Formation Initiale 3ième année

AUTOMATIQUE
ANALYSE ET COMMANDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS OU ÉCHANTILLONNÉS
(Notes de cours et TD autorisées)

– Les 5 exercices sont indépendants –

Les calculs (surtout les calculs matriciels) doivent être détaillés au maximum.

Exercice 1 :

On considère une Caisse d'Épargne dans laquelle le client dépose chaque mois une somme d'argent $u(n)$ (s'il s'agit d'un retrait, $u(n)$ sera négatif), placée au taux d'intérêt mensuel I.
Le mode de calcul des intérêts est le suivant : le i$^{\text{ème}}$ mois, l'intérêt est calculé sur l'argent (capital et intérêt) en dépôt à la fin du (i-1)$^{\text{ème}}$ mois.
Chaque mois, le client dispose donc d'une somme d'argent $y(n)$ qui représente la totalité de ses dépôts antérieurs augmentée des intérêts acquis.

1.1) Déterminer l'équation de fonctionnement de la Caisse d'Épargne, c'est-à-dire $y(n)$ en fonction de $y(n-1)$, $u(n)$ et I. Cette équation récurrente est du premier ordre : elle nécessite la connaissance d'une condition initiale. Quelle est la condition initiale $y(-1)$, sachant que le premier dépôt intervient à partir du mois 0 ?

Le client dépose 100 euros chaque mois dès le mois 0.

1.2) Après avoir calculé $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$, trouver $y(n)$ en fonction de n et de I [1]. Calculer $y(11)$, le capital au bout d'un an (on prendra $I = 0{,}005$).

1.3) En utilisant la transformation en z, exprimer $Y(z)$ en fonction de $U(z)$. En prenant pour $U(z)$ la transformée du signal $u(n)$ appliqué et en cherchant la transformée inverse de $Y(z)$, exprimer $y(k)$. Comparer au résultat de la question 1.2).

1. On rappelle que la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q vaut :

$$S_n = \sum_0^{n-1} x_i = \sum_0^{n-1} x_0\, q^i = x_0 \frac{1-q^n}{1-q}$$

Exercice 2 :

On considère le système analogique de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{p^2}$$

Le calcul d'un correcteur analogique $C(p)$ permettant au système bouclé d'avoir un comportement satisfaisant a conduit au correcteur :

$$C(p) = 0{,}81\,\frac{p + 0{,}2}{p + 2}$$

On se propose de «numériser» ce correcteur analogique pour que le correcteur puisse être implanté sur un calculateur. On approximera la dérivée au 1$^{\text{er}}$ ordre par la méthode de la différence.

2.1) Écrire l'équation récurrente, reliant les échantillons de l'écart ε aux échantillons de la commande u, qui devra être implantée dans le calculateur pour réaliser la correction.

2.2) En déduire l'expression du correcteur numérique $C(z)$ équivalent à $C(p)$.

Exercice 3 :

La correction numérique d'un procédé a conduit à une fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) de la forme suivante :

$$H(z) = \frac{0{,}2\,z + 0{,}1}{z^2 - 0{,}88\,z + 0{,}354}$$

3.1) Déduire des abaques fournies en annexe le dépassement prévisible et le temps du premier maximum en réponse à un échelon (*fournir avec la copie les abaques utilisées*).

3.2) Quel sera l'écart en régime permanent en réponse à un échelon unité ?

Exercice 4 :

On considère le système de la figure 1.

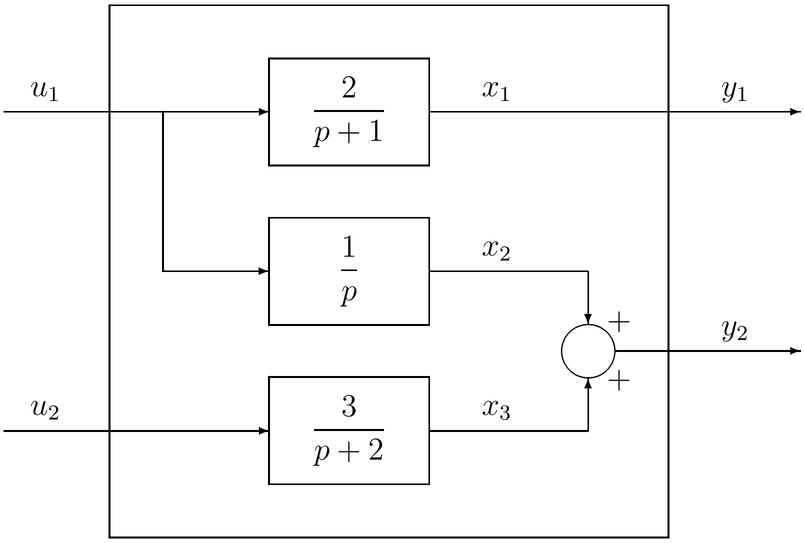


FIG. 1 –

4.1) Écrire la représentation d'état du système correspondant au vecteur d'état constitué des variables internes x_1, x_2 et x_3 définies sur la figure 1.

4.2) À partir de cette représentation d'état, calculer la matrice de transfert du système (détailler les calculs).

Exercice 5 :

On considère le système décrit par :

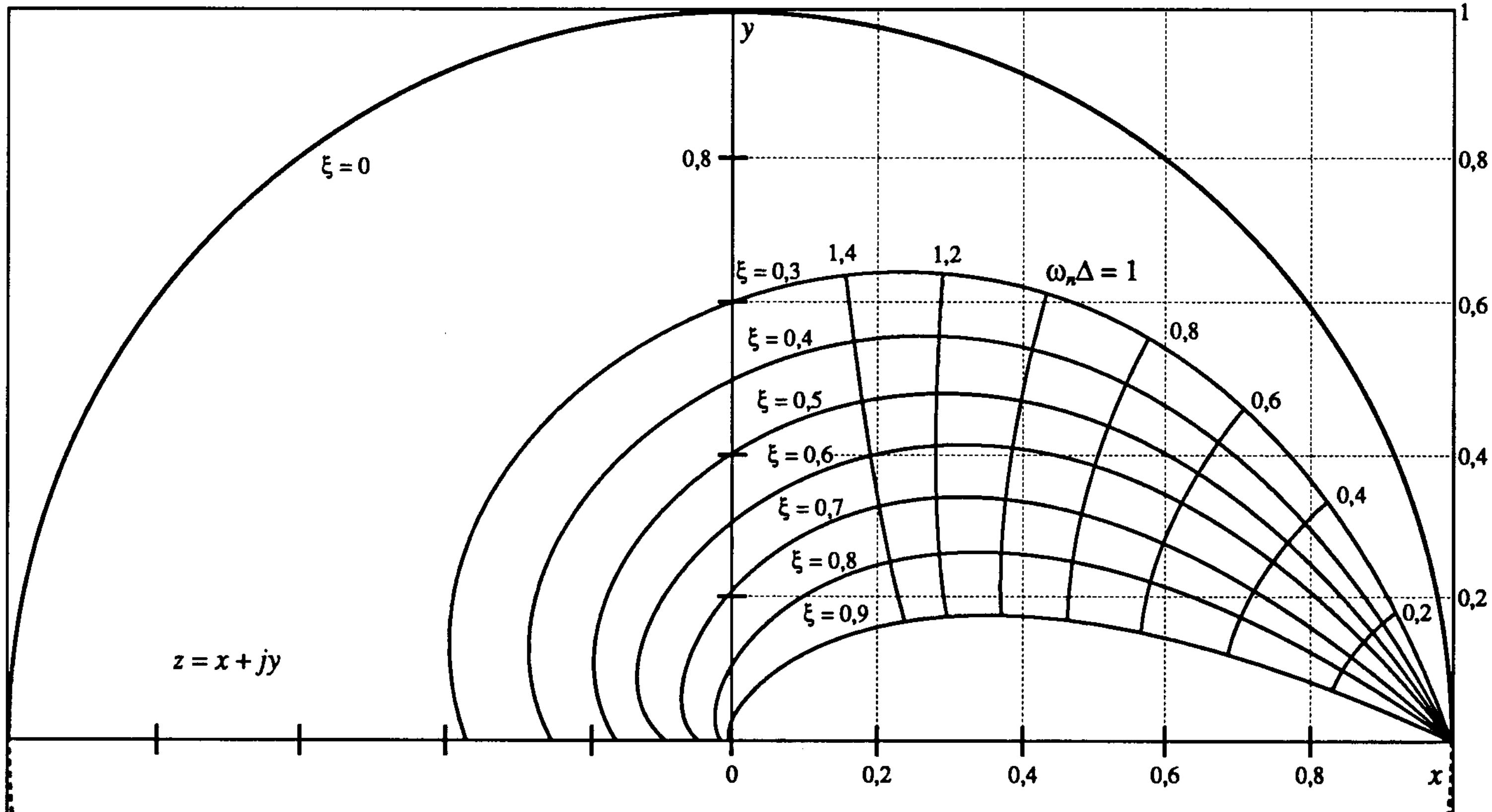
$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

5.1) Montrer que ce système est instable.

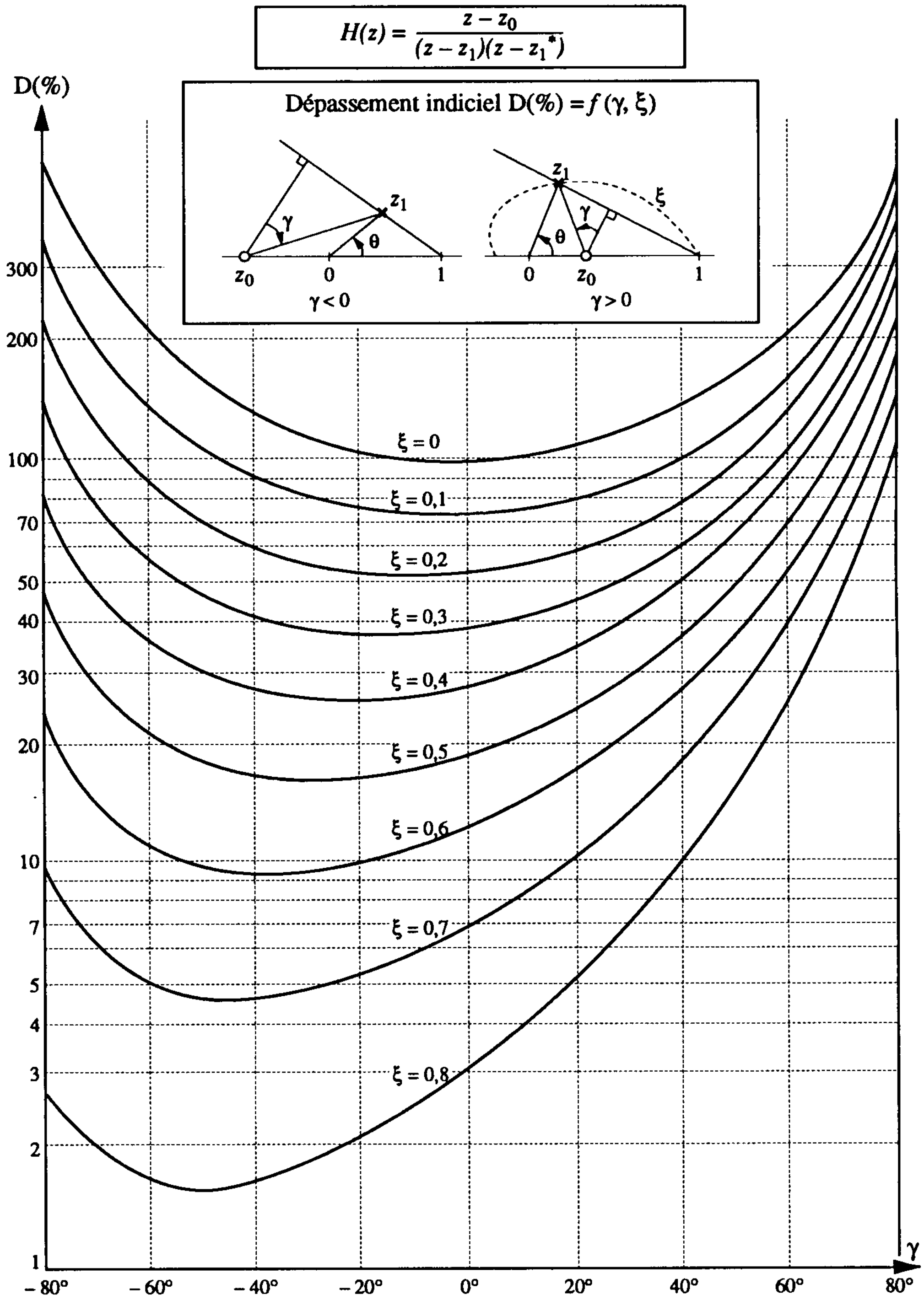
On se propose d'améliorer le comportement du système en recourant à une commande par retour d'état.

5.2) Calculer la matrice de retour d'état K qui conduit à un système en boucle fermée présentant les 2 pôles suivants :

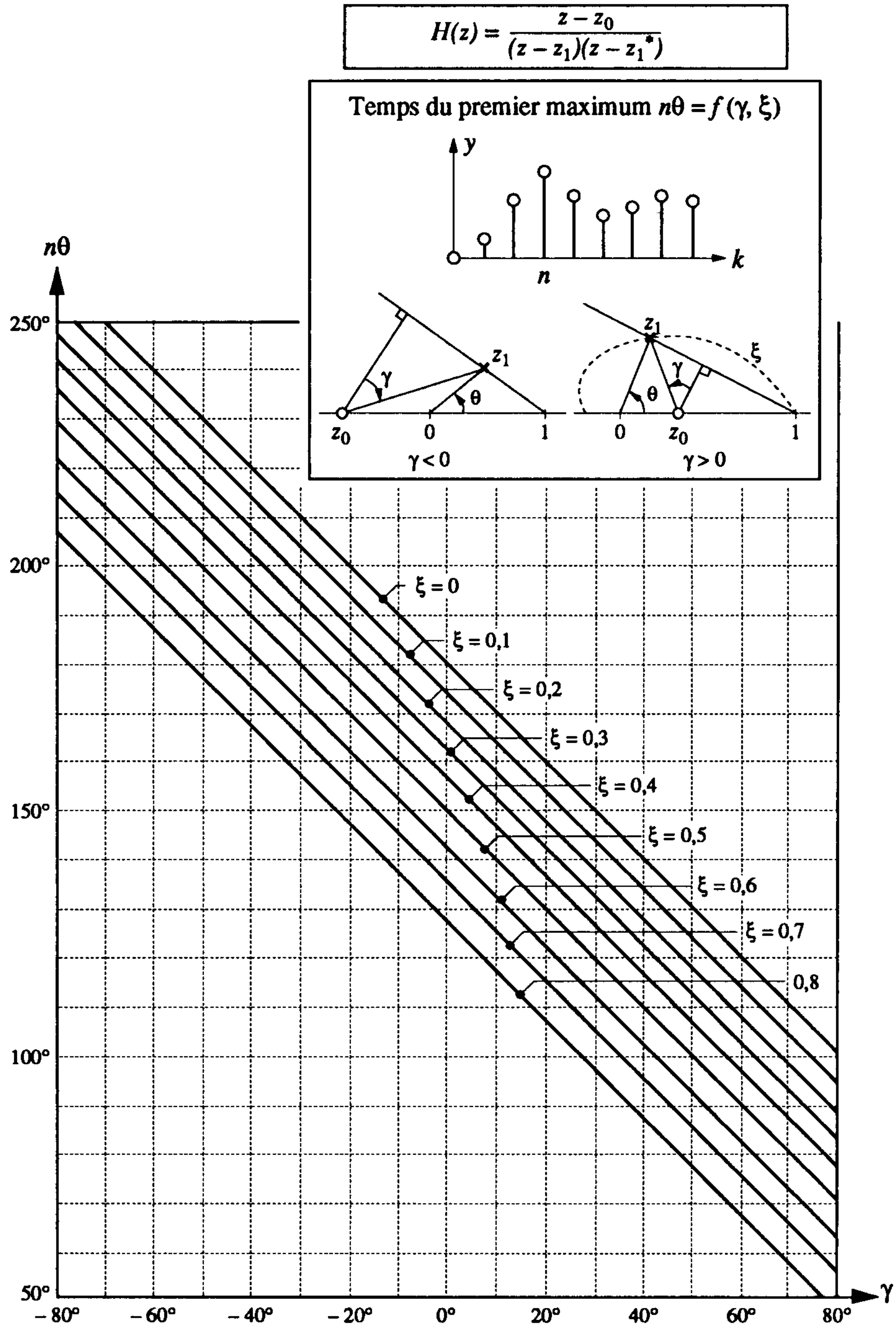
$$\begin{aligned} p_1 &= -2 + j \\ p_2 &= -2 - j \end{aligned}$$



Lieu des pôles à amortissement constant dans le plan z



$H(z) = \frac{z - z_0}{(z - z_1)(z - z_1^*)}$
Dépassement indiciel D(%) = $f(\gamma, \xi)$
z_1
γ
θ
z_0
0
1
$\gamma < 0$
ξ
$\gamma > 0$
D(%)
300
200
100
70
50
40
30
20
10
7
5
4
3
2
1
$\xi = 0$
$\xi = 0,1$
$\xi = 0,2$
$\xi = 0,3$
$\xi = 0,4$
$\xi = 0,5$
$\xi = 0,6$
$\xi = 0,7$
$\xi = 0,8$
γ
– 80°
– 60°
– 40°
– 20°
0°
20°
40°
60°
80°


$H(z) = \dfrac{z - z_0}{(z - z_1)(z - z_1^*)}$
Temps du premier maximum $n\theta = f(\gamma, \xi)$
y
k
n
z_1
γ
θ
z_0
0
1
$\gamma < 0$
ξ
$\gamma > 0$
$n\theta$
250°
200°
150°
100°
50°
$\xi = 0$
$\xi = 0,1$
$\xi = 0,2$
$\xi = 0,3$
$\xi = 0,4$
$\xi = 0,5$
$\xi = 0,6$
$\xi = 0,7$
0,8
– 80°
– 60°
– 40°
– 20°
0°
20°
40°
60°
80°
γ