Ecole des Mines d'Albi-Carmaux — Février 2001
Formation Initiale 3ième année

AUTOMATIQUE
ANALYSE ET COMMANDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS OU ÉCHANTILLONNÉS
(Notes de cours et TD autorisées)

- Les 4 exercices sont indépendants -

*Pour un exercice donné, les questions précédées d'une * ne sont pas indispensables pour pouvoir répondre aux questions suivantes.*

Exercice 1 :

On considère un processus numérique décrit par l'équation récurrente :

$$y(k+2) = 0{,}7\,y(k+1) - 0{,}1\,y(k) + 0{,}3\,u(k+1) + 0{,}15\,u(k)$$

1.1) Calculer sa fonction de transfert en z.

1.2) Donner son gain statique.

Exercice 2 :

Le calcul d'un correcteur numérique a conduit à l'expression :

$$C(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = 20\frac{z^2 + 0{,}5\,z - 1}{z^3 + z^2 - 2\,z + 0{,}2}$$

2.1) En déduire l'équation récurrente à programmer dans l'ordinateur pour réaliser la commande souhaitée.

2.2) Combien d'échantillons faut-il mémoriser pour pouvoir réaliser la commande ? (expliquer).

Exercice 3 : Stabilisation d'un pendule inverse

Considérons le schéma de la figure 1.
L'objectif est en agissant sur le chariot de masse M avec une force $f(t)$ de maintenir le pendule, de masse m et de longueur l, à la verticale[1].

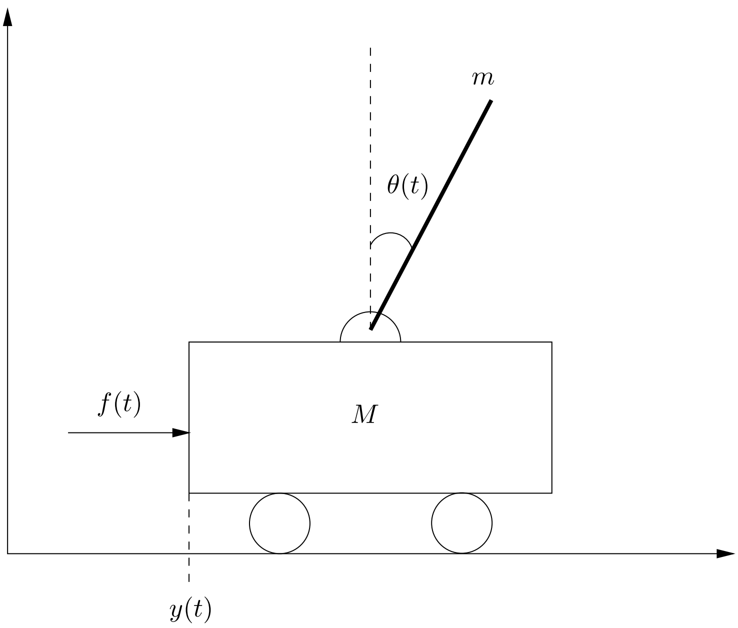

FIG. 1 – *Pendule inverse*

On note : y déplacement du chariot
$\dot{y}$ vitesse de déplacement du chariot
θ angle de rotation du pendule par rapport à la verticale
$\dot{\theta}$ vitesse angulaire de rotation du pendule autour de la verticale

En supposant θ petit, les équations relatives à ce système peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{y} + m\,l\ddot{\theta} = f(t) \\ m\ddot{y} + m\,l\ddot{\theta} = m\,g\,\theta \end{cases}$$

Dans la suite du problème, on ne s'intéresse pas au déplacement horizontal y mais uniquement aux variations θ du pendule. L'objet du problème est d'asservir le pendule en position verticale.

1. Imaginez une fusée (modélisée ici par un pendule) qui, après avoir été assemblée dans un hangar sur un chariot, doit être amenée sur son pas de tir en restant à la verticale pendant tout son trajet.

3.1) Calculer une représentation d'état du système (entrée $f(t)$, sortie $\theta(t)$) en utilisant comme vecteur d'état $x = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$.

Application numérique : $M = 2\,kg$, $m = 0{,}1\,kg$, $l = 0{,}5\,m$.

*3.2) En déduire la fonction de transfert du système $\dfrac{\theta(p)}{F(p)}$ et conclure sur la stabilité du système.

*3.3) Donner la forme canonique de Jordan. Conclure sur l'observabilité du système.

*3.4) Etudier la commandabilité du système.

On effectue une commande par retour d'état de la forme[2]:

$$f(t) = v(t) - K\,x(t)$$

3.5) Calculer les composantes de la matrice de réaction d'état K de manière à ce que le système en boucle fermée présente un pôle double $p_{1,2} = -2$.

3.6) Calculer la fonction de transfert du système en boucle fermée et en déduire son gain statique.

A titre d'information (ça n'aide pas à résoudre le problème : ça montre ce que l'on obtient lorsqu'on l'a résolu !), la figure 2 vous montre ce qui se passe pour une entrée de consigne nulle ($v(t) = 0$) et pour une condition initiale $\theta(0) = 0{,}1\,rd$ (sans réaction d'état, le pendule tombe...).

2. Physiquement, la réaction d'état ne peut pas produire une force. Très souvent, elle est réalisée à l'aide de composants électroniques et elle génère une tension continue. Implicitement, nous supposons qu'un actionneur de gain $1N/V$ transforme le signal élaboré par la réaction d'état en force. De même, nous supposons que des capteurs de gains unitaires transforment θ et $\dot{\theta}$ en tension électrique.

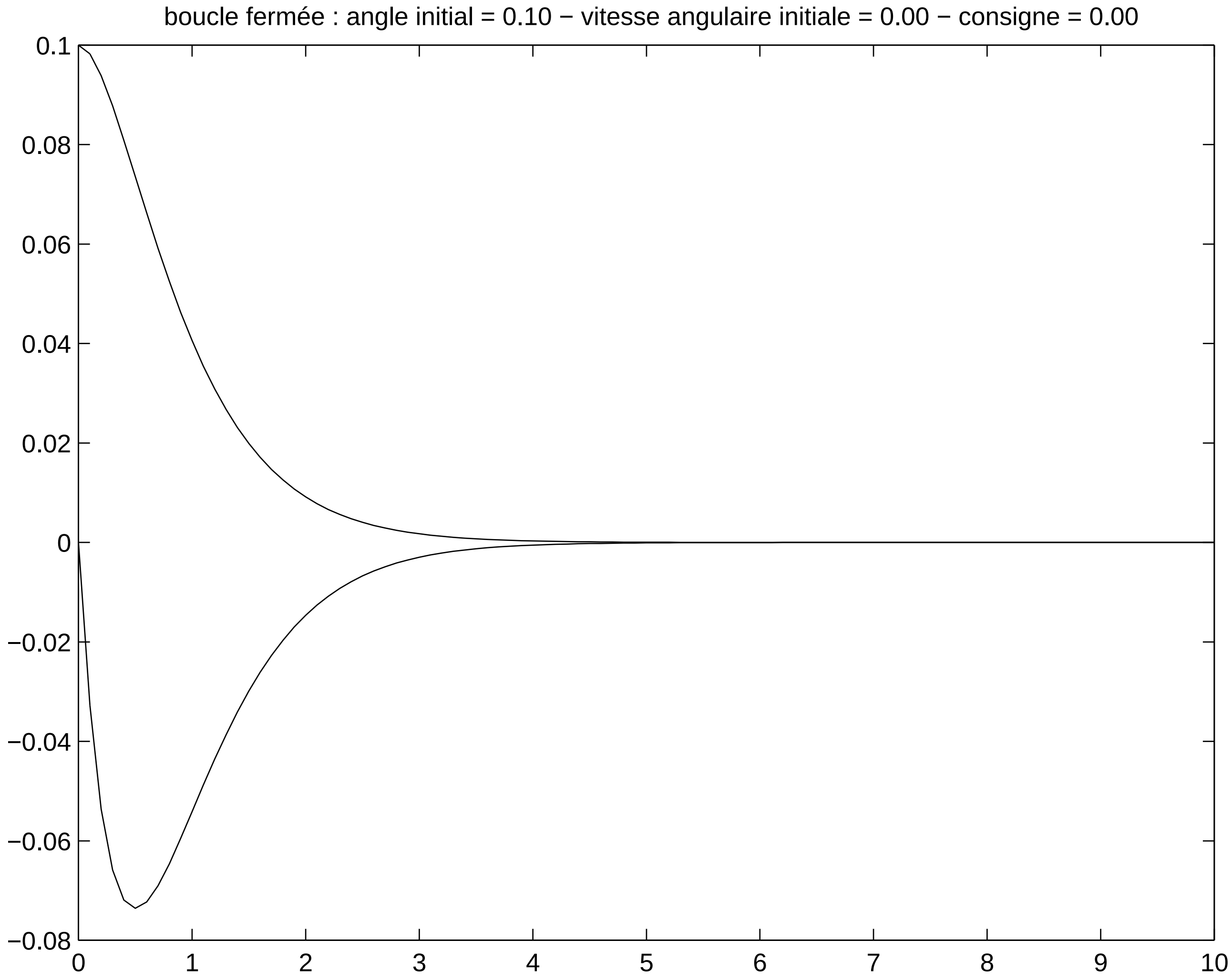

FIG. 2 – *Comportement du système en boucle fermée pour une consigne nulle et un angle initial non nul (les 2 courbes représentent l'évolution de* θ *et* $\dot{\theta}$*)*

Exercice 4 :

Soit un processus continu décrit par les équations d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= -5\,x_2 + u \\ y &= 50\,x_1 \end{aligned}$$

4.1) Calculer les matrices A, B, C et D correspondantes.

*4.2) Calculer la fonction de transfert $G(p) = \dfrac{Y(p)}{U(p)}$ et montrer que $G(p)$ présente une intégration.

On réalise une commande numérique par retour d'état suivant le schéma de la figure 3. On choisit une période d'échantillonnage T égale à 0,2 s.

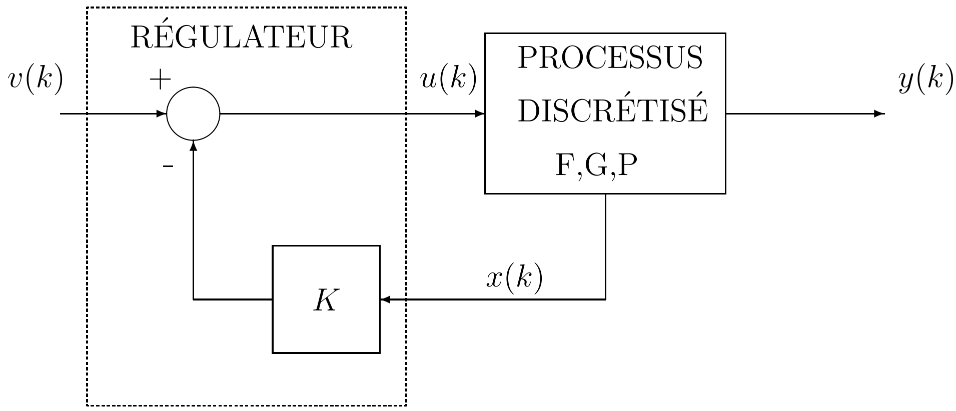

FIG. 3 – *Commande numérique par retour d'état*

*4.3) Montrer que les matrices F, G, P et Q correspondant au processus échantillonné à commander sont égales à :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1264 \\ 0 & 0{,}3679 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 0{,}0147 \\ 0{,}1264 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 50 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q = 0$$

*4.4) Vérifier que le processus discret est commandable.

4.5) Calculer les valeurs des composantes K_1 et K_2 de la matrice de retour d'état K qui permettent d'obtenir un système en boucle fermée présentant 2 pôles égaux à $z_{1,2} = 0{,}4 \pm j\,0{,}5$.

4.6) Donner l'équation récurrente à programmer dans l'ordinateur pour réaliser la commande souhaitée.