Ecole des Mines d'Albi-Carmaux — Janvier 2000
Formation Initiale 3ième année

AUTOMATIQUE
ANALYSE ET COMMANDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS OU ÉCHANTILLONNÉS
(Notes de cours et TD autorisées)

- Les 6 exercices sont indépendants -

Exercice 1 :

On considère le système de la Figure 1-a qui correspond à un processus continu en boucle ouverte.

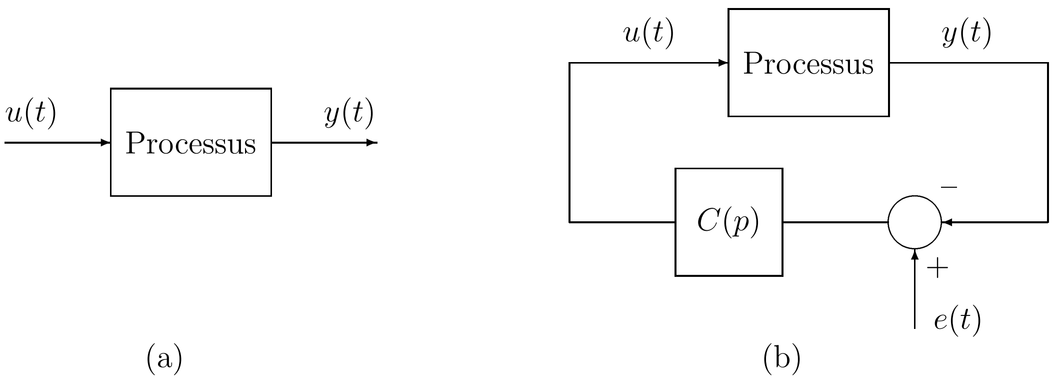


FIG. 1 – *(a) Processus continu en boucle ouverte - (b) Processus continu dans une boucle analogique d'asservissement*

Le processus à piloter $G(p)$ est un premier ordre de gain statique $K = 1$ et de constante de temps $\tau = 0{,}4\,s$.

Une étude préliminaire effectuée à partir de la boucle d'asservissement analogique de la figure 1-b a permis de calculer les paramètres d'un correcteur analogique de type PI :

$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = 0{,}2\left(1 + \frac{1}{0{,}1\,p}\right)$$

Plutôt que de recourir à une commande analogique, on décide de piloter le processus continu par une boucle numérique d'asservissement selon le schéma de la figure 2.
On choisit une fréquence d'échantillonnage de $2{,}5\,Hz$.

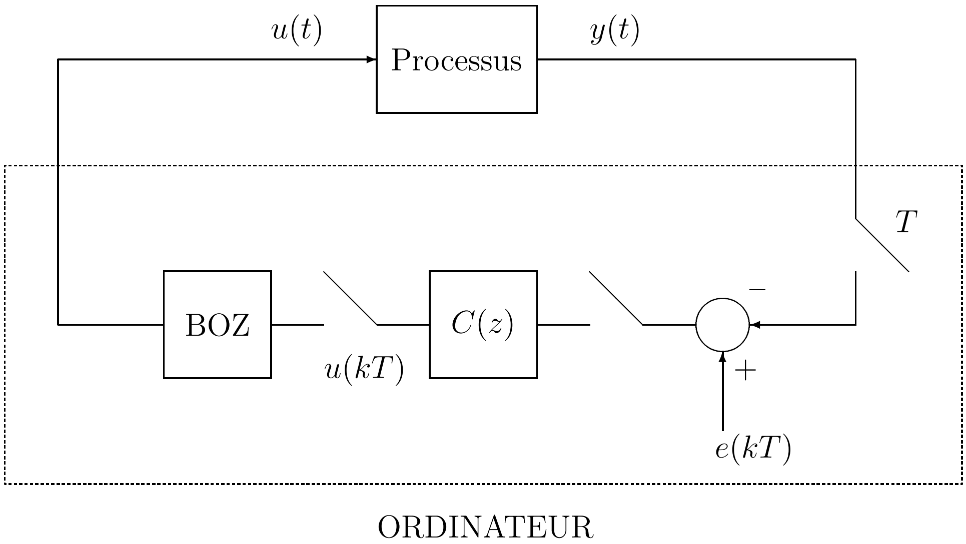


FIG. 2 – *Processus continu dans une boucle numérique d'asservissement*

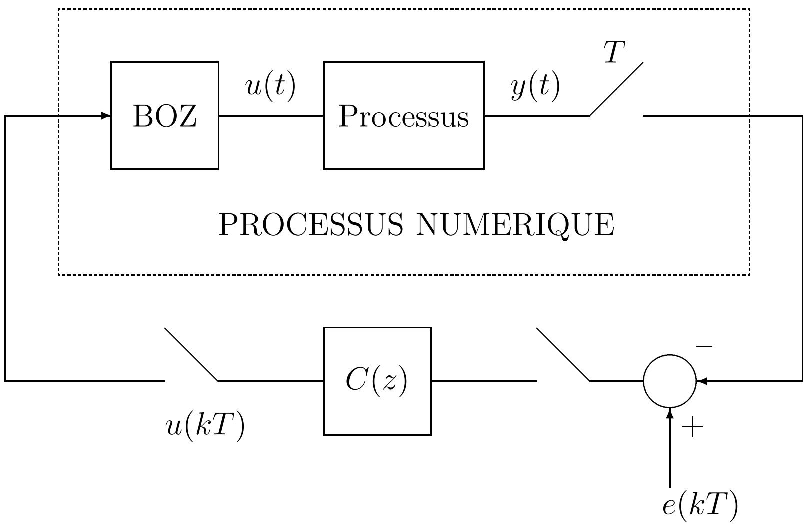


FIG. 3 – *Processus continu dans une boucle numérique d'asservissement*

1.1) Discrétiser la loi de commande analogique et donner l'équation récurrente permettant de calculer les échantillons de commande numérique $u(kT)$.

1.2) En déduire que la fonction de transfert en Z du correcteur numérique équivalent peut se mettre sous la forme :

$$C(z) = K_d \frac{z - z_0}{z - 1}$$

On donnera les valeurs numériques de K_d et z_0.

1.3) Donner la fonction de transfert en Z du processus numérique équivalent au processus continu $G(p)$ muni de son BOZ et échantillonné à la période T (Cf. Figure 3).

1.4) En déduire la fonction de transfert numérique $\dfrac{Y(z)}{E(z)}$ en boucle fermée.
Donner son gain statique (justifier le résultat).

1.5) Après avoir remarqué que la FTBF correspond à un deuxième ordre numérique, utiliser les abaques fournies en annexe pour déterminer :
   a) le coefficient d'amortissement ζ,
   b) le dépassement en réponse à un échelon,
   c) l'instant du premier dépassement.

Exercice 2 :

On considère le schéma de la figure 4 qui représente un système de chauffage.

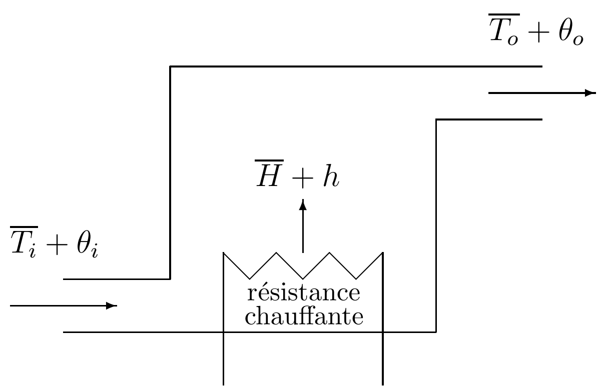


FIG. 4 – *Un système de chauffage*

Le système étant à l'équilibre, on désigne par :

$\overline{T_i}$	la température du liquide froid entrant (en ^oC)
$\overline{T_o}$	la température du liquide chaud sortant (en ^oC)
$\overline{H}$	la chaleur apportée (en $kcal/s$)

Lorsque la température du liquide froid passe de $\overline{T_i}$ à $\overline{T_i}+\theta_i$ et la chaleur apportée passe de $\overline{H}$ à $\overline{H}+h$, la température du liquide chaud passe de $\overline{T_o}$ à $\overline{T_o}+\theta_o$.

Il est facile de montrer que les grandeurs θ_i, h et θ_o, qui désignent des variations par rapport à l'état d'équilibre, sont liées par l'équation différentielle :

$$R\,C\,\frac{d\theta_o}{dt} + \theta_o = \theta_i + R\,h$$

où R désigne la résistance thermique (en $^oC\ s/kcal$) et C désigne la capacité thermique du liquide contenu dans la chaudière (en $kcal/^oC$).

On choisit comme variable d'état $x = \theta_o$, comme vecteur d'entrée $u = \begin{bmatrix} \theta_i \\ h \end{bmatrix}$, et comme sortie θ_o.

2.1) Donner la représentation d'état du système.

2.2) Calculer sa matrice de transfert et compléter le schéma de la figure 5.

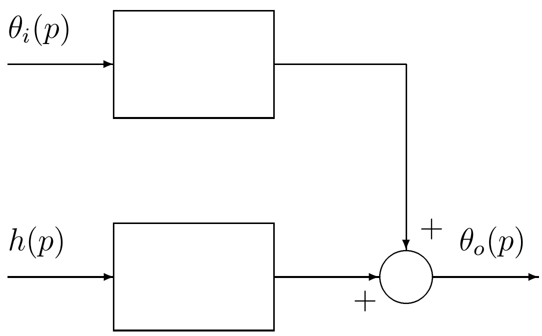


FIG. 5 –

Exercice 3 :

Etant donné le système :

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

calculer $x_1(t)$ et $x_2(t)$ dans le cas où les conditions initiales valent : $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ et l'entrée appliquée est nulle.

Exercice 4 :

On considère le système défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

4.1) Calculer les pôles du système. Conclure.

De manière à améliorer le comportement du système, on envisage de réaliser une commande par retour d'état $u = v - K\,x$.

4.2) Que faut-il d'abord vérifier ?

4.3) Calculer la valeur de K qui permet d'obtenir un système en boucle fermée présentant 2 pôles $(-1 + 2\,j)$ et $(-1 - 2\,j)$.

Exercice 5 :

On considère le système :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

5.1) Expliquer pourquoi ce système est instable.

5.2) Expliquer pourquoi il est utopique d'envisager de le stabiliser en recourant à une commande par retour d'état.

Exercice 6 :

Pour chacun des systèmes suivants[1] , indiquer s'il est commandable et/ou observable (on justifiera la réponse) :

a)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \\ y = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

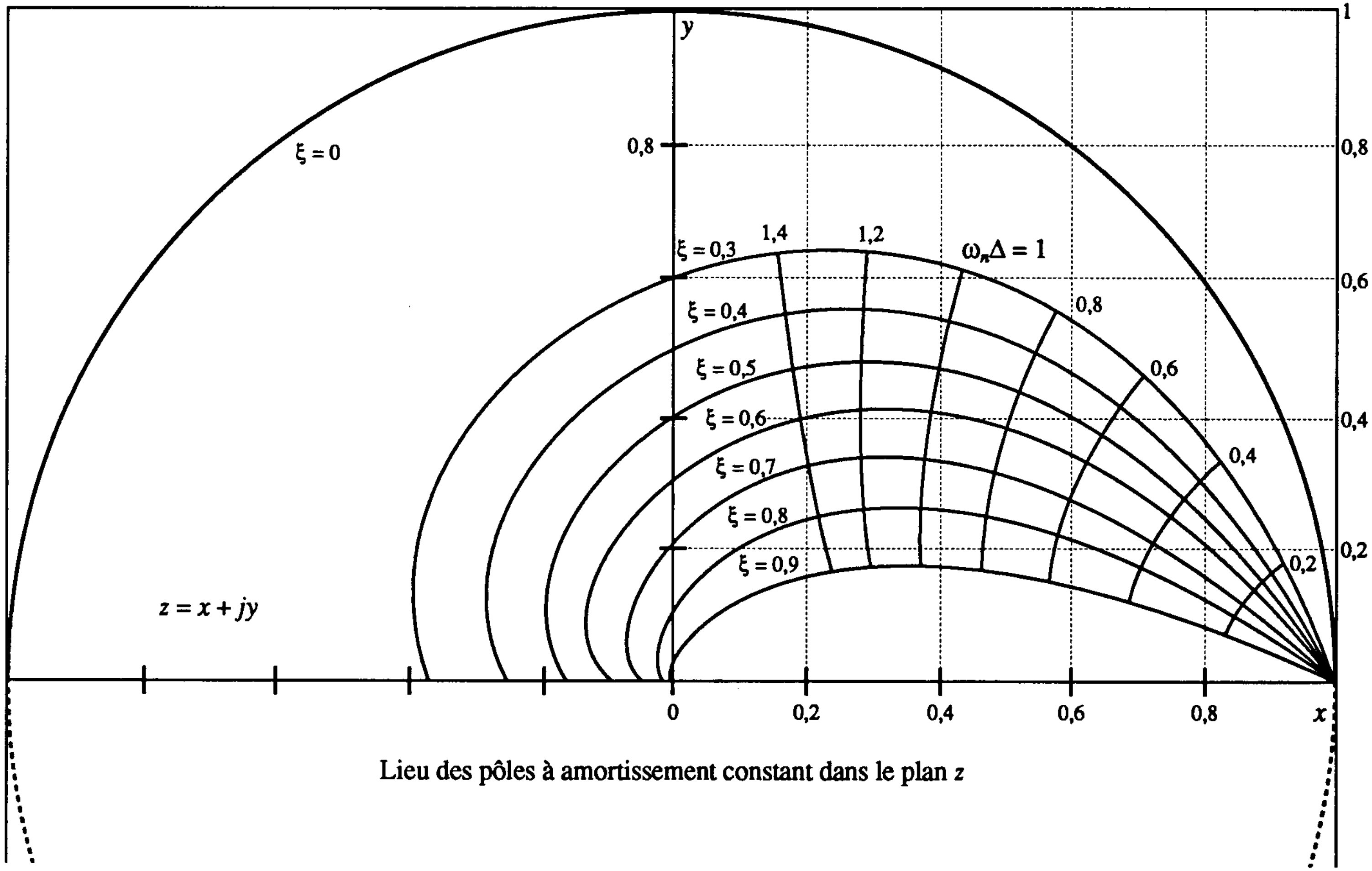
b)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} u \\ \\ y = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

c)

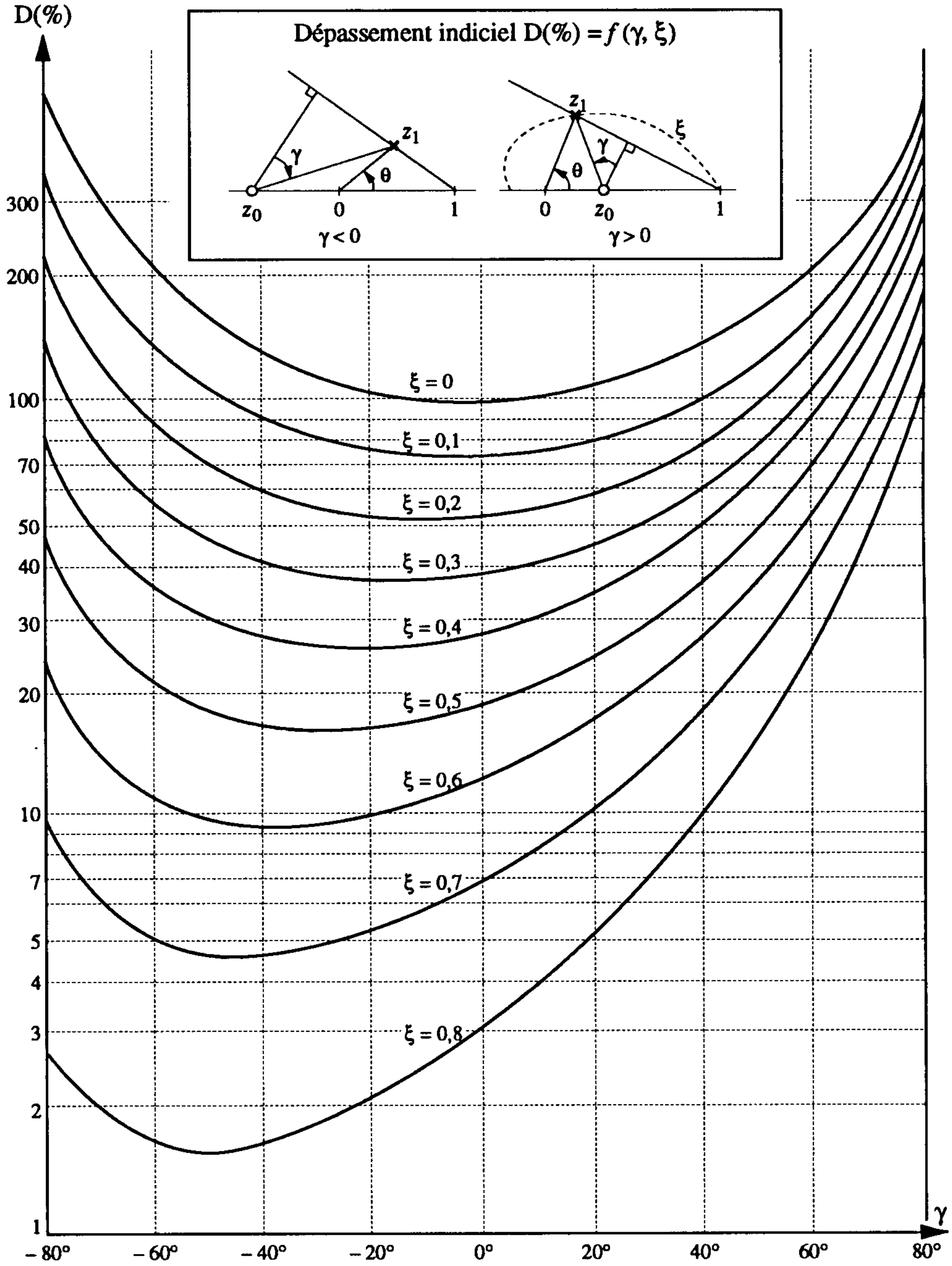
$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & -2{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u \\ \\ y = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

1. On remarquera que la matrice d'évolution est diagonale.



Lieu des pôles à amortissement constant dans le plan z

$$H(z) = \frac{z - z_0}{(z - z_1)(z - z_1^*)}$$



$$H(z) = \frac{z - z_0}{(z - z_1)(z - z_1^*)}$$