Ecole des Mines d'Albi-Carmaux
Formation Initiale 2ème année

Mars 1998

AUTOMATIQUE : SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS
EPREUVE DE RATTRAPAGE ULTIME

Les 7 exercices sont indépendants.
On apportera un soin particulier à la rédaction des réponses.
Chaque courbe tracée avec MATLAB aura un titre qui indiquera le numéro de la question correspondante. On fournira un listing MATLAB pour chacun des exercices.

Exercice 1 :

On désire produire une solution de concentration C fixée. Pour cela, on dispose d'un bac alimenté par la solution diluée (à 1 g/l) que l'on concentre à l'aide d'un débit Q de produit pur.
Une analyse fréquentielle du procédé a fourni les informations suivantes.

En réponse à un débit Q variant comme :

$$Q = 5 + 5\sin(2\pi f t) \quad \text{(l/h)}$$

l'évolution de la concentration C au cours du temps a été :

$$C = 5 + b\sin(2\pi f t + \varphi) \quad \text{(g/l)}$$

Pour différentes valeurs de la fréquence f, on a obtenu les résultats regroupés dans le Tableau 1.

f (cycles/h)	1	2	3	4	6	20
b (g/l)	3,8	3,4	2,9	2,5	1,85	0,65
φ (degrés)	-17,5	-32,15	-43,3	-51,5	-62,05	-81

Tab. 1 – Résultats de l'analyse fréquentielle

1.1) En déduire la fonction de transfert $H(p)$ reliant les fluctuations de la sortie (C) à celles de l'entrée (Q).

1.2) Tracer avec MATLAB le diagramme de Bode correspondant à cette fonction de transfert. Comparer avec les valeurs du Tableau 1.

1.3) Tracer avec MATLAB la réponse à un échelon de position en entrée ainsi que la réponse à une rampe.

Exercice 2 :

On considère un réacteur parfaitement agité dans lequel s'effectue la réaction $A \longrightarrow B$. On désigne par Q le débit d'alimentation du réacteur et par C_A la concentration du produit A en sortie du réacteur.
Une étude de la réponse du système à un échelon sur le débit d'entrée a fourni la courbe donnée en Figure 1.

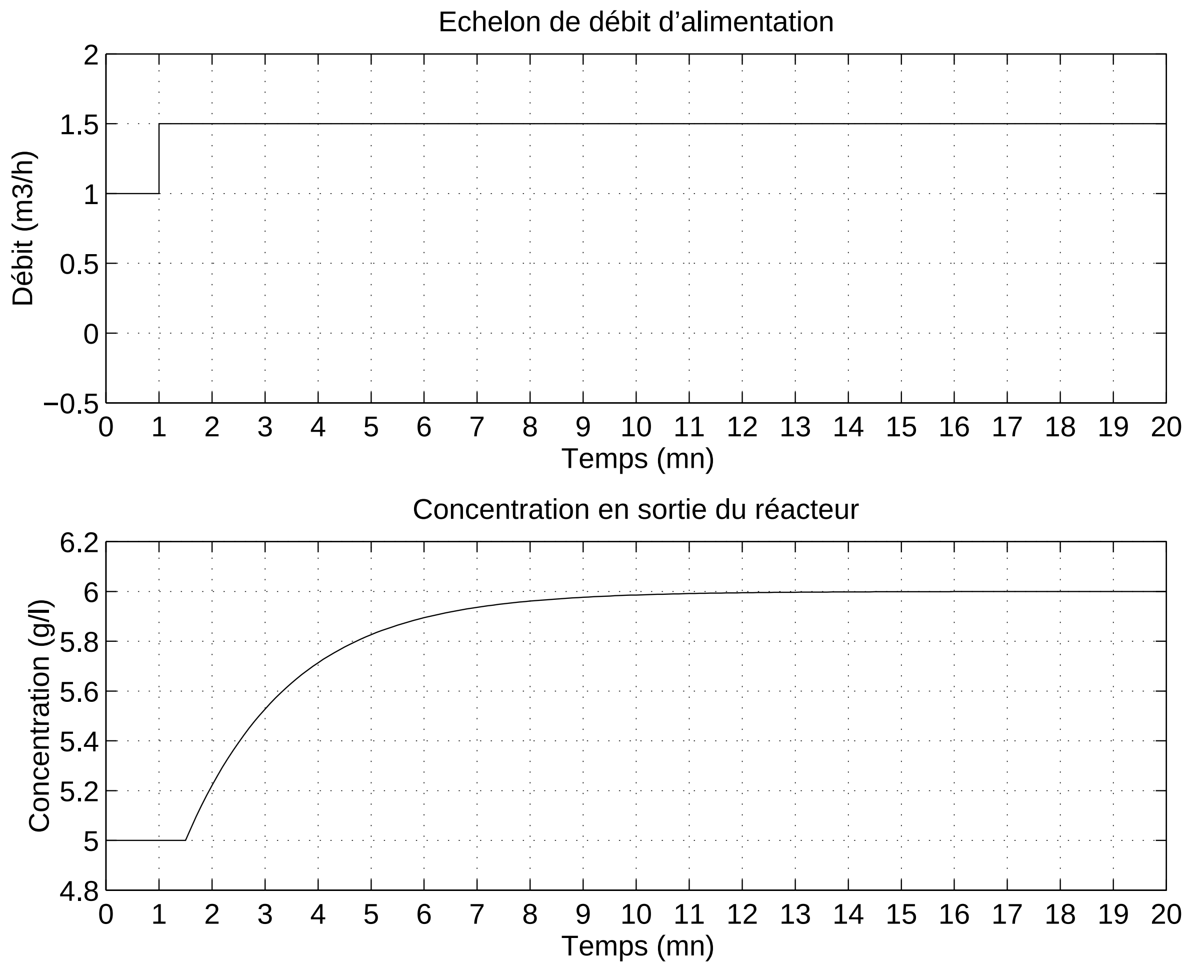


FIG. 1 – Variations de la concentration C_A en sortie du réacteur en réponse à un échelon du débit d'alimentation Q

2.1) À l'aide de ces courbes, déterminer la fonction de transfert qui relie les fluctuations de la concentration C_A à celles du débit Q.

2.2) Tracer avec MATLAB la réponse du système à un échelon sur le débit d'alimentation Q.

Exercice 3 :

On considère le système de la Figure 2 constitué de deux réservoirs en série.
Au repos, le débit d'entrée et le débit de sortie sont tous les deux égaux à $\overline{Q}$, et le débit entre les deux réservoirs est nul. Les niveaux dans les réservoirs 1 et 2 sont tous les deux égaux à $\overline{H}$.
A $t = 0$, le débit d'entrée est modifié de $\overline{Q}$ à $\overline{Q} + q$, où q désigne une petite variation du débit d'entrée. Les variations de niveau (h_1 et h_2) et de débits (q_1 et q_2) résultant de cette modification sont supposées faibles.
On désigne par S_1 et S_2 les sections des réservoirs 1 et 2, respectivement. La résistance à l'écoulement[1] de la valve située entre les deux réservoirs est désignée par R_1 et celle de la vanne de sortie est désignée par R_2.

Caractéristiques du système :

$$S_1 = 1\,dm^2 \quad , \quad R_1 = 1\,s/dm^2$$

$$S_2 = 1\,dm^2 \quad , \quad R_2 = 1\,s/dm^2$$

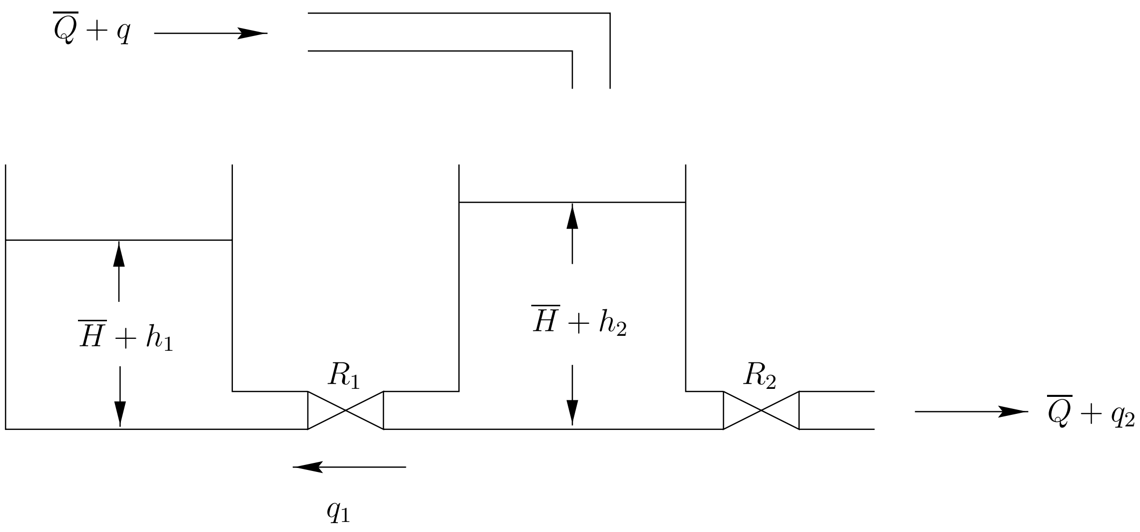


FIG. 2 – Deux réservoirs en série

1. résistances à l'écoulement :

$$R_1 = \frac{h_2 - h_1}{q_1} \qquad , \qquad R_2 = \frac{h_2}{q_2}$$

3.1) Montrer que la modélisation du système conduit aux équations différentielles suivantes :

$$R_1S_1\frac{dh_1}{dt} + h_1 = h_2$$

$$R_2S_2\frac{dh_2}{dt} + \frac{R_2}{R_1}h_2 + h_2 = R_2q + \frac{R_2}{R_1}h_1$$

3.2) On choisit comme variables d'état les niveaux h_1 et h_2.
Donner la représentation d'état correspondant aux cas suivants :

a) on observe le débit q_2.
b) on observe le niveau h_2.
c) on observe le débit q_2 et le niveau h_2.

3.3) Application numérique.

3.4) Le système est-il stable, commandable, observable ?

3.5) À partir de la représentation d'état établie à la question 3.2), tracer avec MATLAB, sur une même figure, l'évolution du débit q_2 et du niveau h_2 en réponse à un échelon de débit q.

3.6) Calculer les fonctions de transfert $\frac{Q_2(p)}{Q(p)}$ et $\frac{H_2(p)}{Q(p)}$.

Retrouver ces fonctions de transfert avec MATLAB à partir de la représentation d'état du système.

3.7) Tracer avec MATLAB l'évolution du niveau dans le bac 2 en réponse à un échelon de débit d'alimentation, dans les 2 cas suivants :

a) en utilisant la fonction de transfert trouvée à la question 3.6).
b) en négligeant l'influence du zéro au numérateur de la fonction de transfert trouvée à la question 3.6).

On tracera les 2 courbes sur une même figure. Commentaire.

Exercice 4 :

En vue de disposer d'un volume constant de fluide à une température désirée, un processus hydraulique et thermique schématisé par la Figure 3 est constitué d'un réservoir de section S équipé d'une résistance chauffante.
Les entrées commandables du système sont le débit d'entrée du fluide Q_e et la puissance électrique P_u de chauffage. Les sorties sont la hauteur d'eau H dans le réservoir et la température T_s de sortie du réservoir. Le débit Q_s de sortie du fluide est régi par un écoulement par gravité selon une loi $Q_s = K\sqrt{H}$ (Cf. TD N° 1) où K est une constante.

Afin de modéliser le processus, on fait les hypothèses suivantes :
- la température d'arrivée du fluide T_e est constante;
- le réservoir est parfaitement calorifugé et sa capacité thermique est négligeable;
- l'échange de chaleur entre la résistance chauffante et le fluide est instantané.

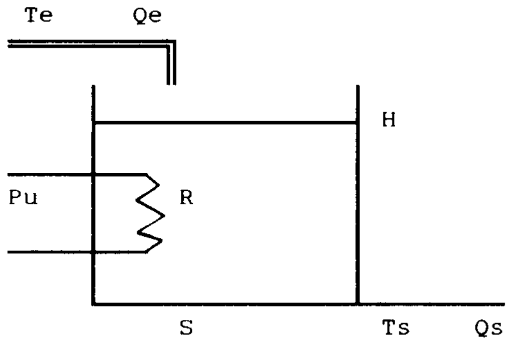


FIG. 3 – *Régulation de niveau et de température d'un bac*

4.1) En écrivant les équations de conservation du volume et de la quantité de chaleur, montrer que l'on obtient la modélisation suivante :

$$\frac{dT_s}{dt} = \frac{P_u}{SH\mu\, c} - \frac{T_s - T_e}{SH} Q_e \tag{1}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{Q_e}{S} - \frac{K}{S}\sqrt{H} \tag{2}$$

avec μ : masse volumique du fluide
c : chaleur spécifique du fluide

4.2) Expliquer en quoi ces équations sont non linéaires.

4.3) On se propose de linéariser les équations (1) et (2) autour du point de fonctionnement $(Q_{e0}, T_{s0}, Q_{s0}, H_0, P_{u0})$ en considérant des petites variations autour du régime nominal (Cf. TD N° 1).

En adoptant les notations :

$$\begin{array}{rclcrcl} Q_e & = & Q_{e0} + q_e & \quad & H & = & H_0 + h \\ T_s & = & T_{s0} + \theta & & P_u & = & P_{u0} + p_u \\ Q_s & = & Q_{s0} + q_s & & & & \end{array}$$

montrer que l'on obtient le modèle linéaire suivant :

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{Q_{e_0}}{SH_0}\,\theta = -\frac{T_{s_0} - T_e}{SH_0}\,q_e + (T_{s_0} - T_e)\frac{Q_{e_0}}{SH_0 P_{u_0}}\,p_u$$

$$S\,\frac{dh}{dt} + \frac{Q_{e_0}}{2H_0}\,h = q_e$$

On adoptera les valeurs numériques suivantes :

Q_{e_0}	débit d'entrée	valeur nominale	$20\,l/mn$
T_{s_0}	température de sortie	valeur nominale	$50\,^oC$
H_0	hauteur du fluide	valeur nominale	$600\,mm$
P_{u_0}	puissance de chauffe	valeur nominale	$20\,kW$
Q_{s_0}	débit de sortie	valeur nominale	$20\,l/mn$
T_e	température du fluide en entrée	constante	$20\,^oC$
S	section du bac	constante	$1\,m^2$

On utilisera les unités suivantes :

$$\begin{array}{lll} h & \text{en} & mm \\ q & \text{en} & l/mn \end{array} \qquad \begin{array}{rll} \theta & \text{en} & ^oC \\ p_u & \text{en} & kW \end{array}$$

4.4) Calculer la fonction de transfert $\dfrac{h(p)}{q_e(p)}$ *(expression littérale et application numérique).*

4.5) À l'instant $t = 0$, le débit d'alimentation Q_e passe instantanément de la valeur Q_{e0} à la valeur $Q_{e_1} = 22\,l/mn$.
Calculer la hauteur d'eau dans le réservoir au bout d'une heure. Au bout de combien de temps peut-on considérer qu'un nouveau régime permanent est atteint ?

4.6) Tracer avec MATLAB l'évolution de la hauteur d'eau dans le réservoir à partir de $t = 0$. Retrouver les résultats de la question 4.5).

4.7) Donner une représentation d'état du système de la forme :

$$\dot{x} \;=\; A\,x + B\,u$$

$$y = C\,x + D\,u$$

avec :

$$x = \begin{bmatrix} h & \theta \end{bmatrix}^T \qquad u = \begin{bmatrix} q_e & p_u \end{bmatrix}^T \qquad y = \begin{bmatrix} h & \theta \end{bmatrix}^T$$

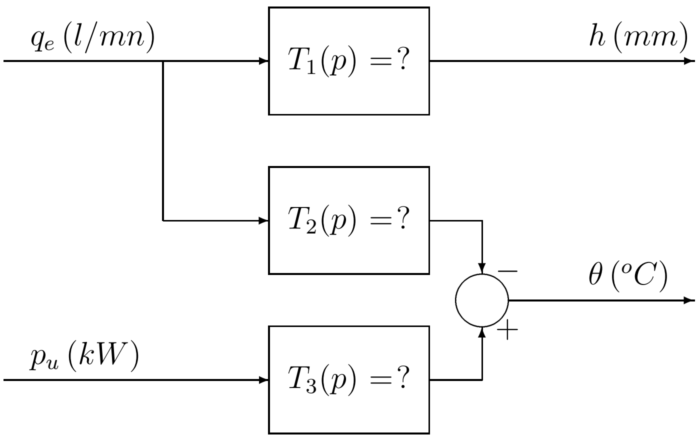
(on donnera l'expression littérale et on fera l'application numérique)

En quoi la matrice A a-t-elle une forme « sympathique » ?

4.8) Le système est-il stable ?

4.9) Calculer la matrice de transfert $G(p)$ permettant de relier les sorties aux entrées commandables, i.e. $Y(p) = G(p)\,U(p)$.
Comparer avec le résultat de la question 4.4).
Retrouver cette matrice de transfert avec MATLAB à partir de la représentation d'état du système.

4.10) Compléter le schéma fonctionnel suivant :



4.11) À partir de la représentation d'état établie à la question 4.7), tracer avec MATLAB l'évolution de la hauteur d'eau dans le réservoir pour la variation du débit d'alimentation de la question 4.5).

4.12) On suppose maintenant que seule la température est mesurée. Ce système est-il observable ? Expliquer la conséquence pratique de ce résultat.

4.13) À partir du régime nominal initial (Q_{e0},T_{s0},Q_{s0},H_0,P_{u0}) et à l'instant $t = 0$, on ajoute une quantité de fluide froid. Il s'ensuit que le niveau et la température sont écartés de leur valeur nominale (réponse libre du système à des conditions initiales, les entrées étant supposées constantes).
Calculer la réponse du système pour l'état initial :

$$x(0) = \begin{bmatrix} 5\,mm & -2\,^oC \end{bmatrix}^T$$

Quelle sera la température T_s dans le bac au bout d'une heure?
Tracer avec MATLAB l'évolution de la température T_s et du niveau dans le bac.

Exercice 5 :

La courbe de la Figure 4 représente la réponse d'un système du 2ème ordre à un échelon unitaire.

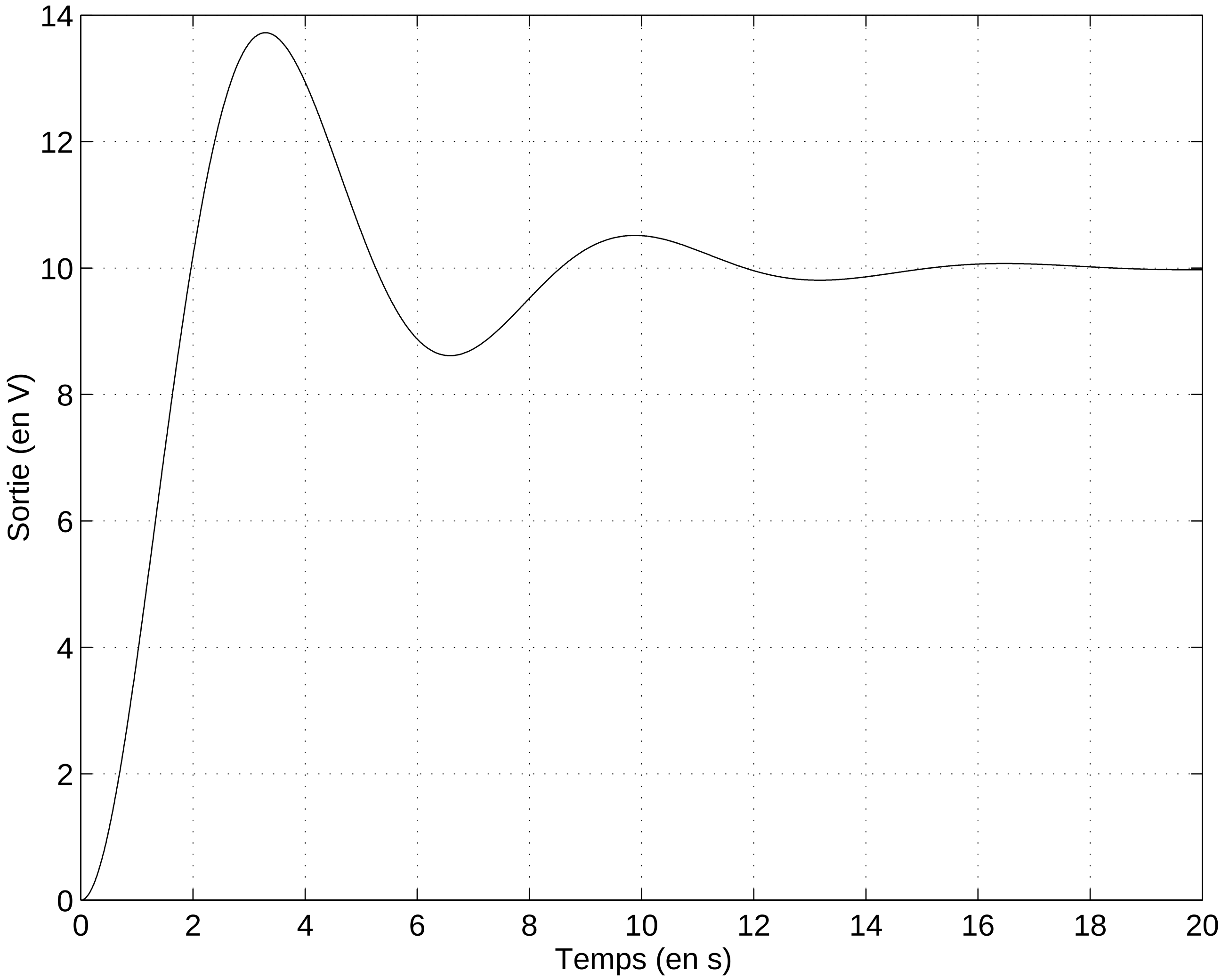


FIG. 4 – *Réponse du système à un échelon unitaire*

5.1) Déduire de cette courbe les paramètres du système.

5.2) Tracer avec MATLAB la réponse du système à un échelon unitaire.

5.3) On applique à l'entrée du système un signal sinusoïdal d'amplitude $2\,V$ et de fréquence $1\,Hz$.
Calculer l'amplitude et le déphasage du signal en sortie du système, en régime permanent. Commentaire.

5.4) Tracer avec MATLAB la réponse du système à un signal sinusoïdal d'amplitude $2\,V$ et de fréquence :

a) $0{,}05\,Hz$

b) $0{,}15\,Hz$

c) $1\,Hz$

Commentaire.

5.5) Tracer avec MATLAB le diagramme de Bode du système. Comparer avec les résultats de la question 5.4).

Exercice 6 :

On considère le système hydraulique de la Figure 5.

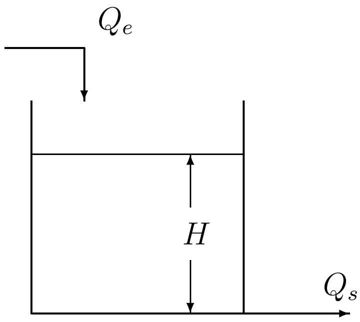


Fig. 5 – *Bac*

Le réservoir a une surface $S = 2m^2$ et l'orifice de sortie a une section petite devant S. La grandeur H désigne la hauteur de liquide dans le réservoir. On suppose que le débit de sortie Q_s est lié à la hauteur de liquide H par la relation $Q_s = K\sqrt{H}$.

Lorsque le débit d'entrée Q_e est égal à $0{,}015\,m^3/s$, le niveau de liquide est constant et égal à $2{,}25\,m$.

A $t = 0$, alors que le niveau de liquide est stabilisé, la vanne d'entrée est fermée.

6.1) Trouver le temps nécessaire pour que le réservoir se vide à la moitié de sa hauteur de départ.

Exercice 7 :

Soit le système :

$$H(p) = \frac{1}{(1+T_1\,p)(1+T_2\,p)} \qquad \text{avec} \quad T_1 = 10\,s$$

7.1) Tracer avec MATLAB la réponse du système à un échelon unité dans le cas où $T_2 = \dfrac{T_1}{10}$.

7.2) Tracer avec MATLAB, sur le même graphique, la réponse du système du premier ordre $H_1(p) = \dfrac{1}{1+T_1\,p}$. Comparer.

7.3) Calculer la différence entre les deux courbes pour $t = T_1$.

7.4) Montrer que la réponse du système du second ordre se confond avec celle du premier ordre pour $t > T_1$, et que seul le début du régime exponentiel est différent.

7.5) Montrer que la réponse du système du second ordre présente une tangente horizontale au démarrage, ce qui le distingue du système du premier ordre qui lui démarre rapidement avec une pente initiale non nulle.

7.6) Tracer avec MATLAB, sur une même figure, les lieux de Black des deux fonctions de transfert $H(p)$ et $H_1(p)$. Conclure sur le comportement en basse-fréquence des deux systèmes.