Ecole des Mines d'Albi-Carmaux
Formation Initiale 2ème année

Février 1998

AUTOMATIQUE : SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS

EXAMEN DE RATTRAPAGE

(durée : 1h30)

(Notes de cours et TD autorisées)

- Les 2 exercices sont indépendants -

Exercice 1 :

En vue de disposer d'un volume constant de fluide à une température désirée, un processus hydraulique et thermique schématisé par la Figure 1 est constitué d'un réservoir de section S équipé d'une résistance chauffante.
Les entrées commandables du système sont le débit d'entrée du fluide Q_e et la puissance électrique P_u de chauffage. Les sorties sont la hauteur d'eau H dans le réservoir et la température T_s de sortie du réservoir. Le débit Q_s de sortie du fluide est régi par un écoulement par gravité selon une loi $Q_s = K\sqrt{H}$ (Cf. TD N° 1) où K est une constante.

Afin de modéliser le processus, on fait les hypothèses suivantes :
- la température d'arrivée du fluide T_e est constante;
- le réservoir est parfaitement calorifugé et sa capacité thermique est négligeable;
- l'échange de chaleur entre la résistance chauffante et le fluide est instantané.

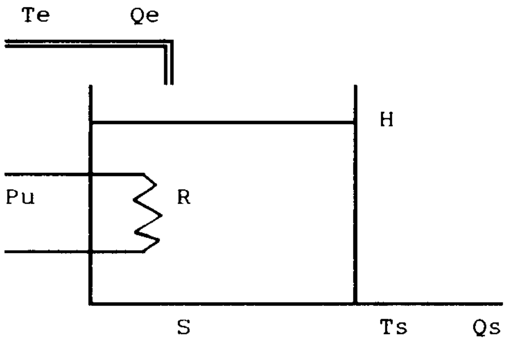


FIG. 1 – *Régulation de niveau et de température d'un bac*

En écrivant les équations de conservation du volume et de la quantité de chaleur, on obtient la modélisation suivante :

$$\frac{dT_s}{dt} = \frac{P_u}{SH\mu\, c} - \frac{T_s - T_e}{SH} Q_e$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{Q_e}{S} - \frac{K}{S}\sqrt{H}$$

avec μ : masse volumique du fluide
c : chaleur spécifique du fluide

Ces équations sont <u>non linéaires</u> mais elles peuvent être linéarisées autour du point de fonctionnement choisi (Q_{e_0},T_{s_0},Q_{s_0},H_0,P_{u_0}) en considérant des petites variations autour du régime nominal (Cf. TD N° 1).

En adoptant les notations :

$$\begin{array}{rclcrcl} Q_e & = & Q_{e_0} + q_e & \quad & H & = & H_0 + h \\ T_s & = & T_{s_0} + \theta & & P_u & = & P_{u_0} + p_u \\ Q_s & = & Q_{s_0} + q_s & & & & \end{array}$$

la linéarisation conduit aux équations :

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{Q_{e_0}}{SH_0}\theta = -\frac{T_{s_0} - T_e}{SH_0} q_e + (T_{s_0} - T_e)\frac{Q_{e_0}}{SH_0 P_{u_0}} p_u$$

$$S\frac{dh}{dt} + \frac{Q_{e_0}}{2H_0} h = q_e$$

On adoptera les valeurs numériques suivantes :

Q_{e_0}	débit d'entrée	valeur nominale	$20\, l/mn$
T_{s_0}	température de sortie	valeur nominale	$50\, ^oC$
H_0	hauteur du fluide	valeur nominale	$600\, mm$
P_{u_0}	puissance de chauffe	valeur nominale	$20\, kW$
Q_{s_0}	débit de sortie	valeur nominale	$20\, l/mn$
T_e	température du fluide en entrée	constante	$20\, ^oC$
S	section du bac	constante	$1\, m^2$

On utilisera les unités suivantes :

$$\begin{array}{lll} h & \text{en} & mm \\ q & \text{en} & l/mn \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \theta & \text{en} & {}^oC \\ p_u & \text{en} & kW \end{array}$$

1.1) Calculer la fonction de transfert $\dfrac{h(p)}{q_e(p)}$ (expression littérale et application numérique).

1.2) À l'instant $t = 0$ le débit d'alimentation Q_e passe instantanément de la valeur Q_{e_0} à la valeur $Q_{e_1} = 22\, l/mn$.
Calculer la hauteur d'eau dans le réservoir au bout d'une heure. Au bout de combien de temps peut-on considérer qu'un nouveau régime permanent est atteint ?
Tracer l'évolution de la hauteur d'eau dans le réservoir à partir de $t = 0$.

1.3) Donner une représentation d'état du système de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\,x + B\,u \\ y &= C\,x + D\,u \end{aligned}$$

avec :

$$x = \begin{bmatrix} h & \theta \end{bmatrix}^T \qquad u = \begin{bmatrix} q_e & p_u \end{bmatrix}^T \qquad y = \begin{bmatrix} h & \theta \end{bmatrix}^T$$

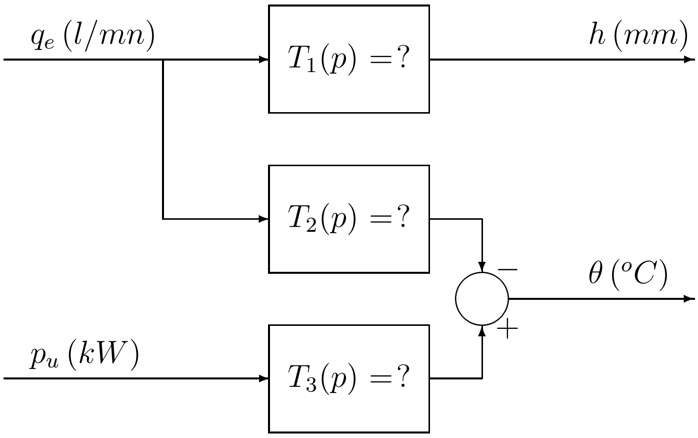
(on donnera l'expression littérale et on fera l'application numérique)

En quoi la matrice A a-t-elle une forme « sympathique » ?

1.4) Le système est-il stable ?

1.5) Calculer la matrice de transfert $G(p)$ permettant de relier les sorties aux entrées commandables, i.e. $Y(p) = G(p)\,U(p)$.
Comparer avec le résultat de la question 1.1).

1.6) Compléter le schéma fonctionnel suivant :



1.7) On suppose maintenant que seule la température est mesurée. Ce système est-il observable ? Expliquer la conséquence pratique de ce résultat.

1.8) À partir du régime nominal initial (Q_{e_0},T_{s_0},Q_{s_0},H_0,P_{u_0}) et à l'instant $t = 0$, on ajoute une quantité de fluide froid. Il s'ensuit que le niveau et la température sont écartés de leur valeur nominale (réponse libre du système à des conditions initiales, les entrées étant supposées constantes).
Calculer la réponse du système pour l'état initial :

$$x(0) = \left[\begin{array}{cc} 5\,mm & -2\,^oC \end{array} \right]^T$$

Quelle sera la température T_s dans le bac au bout d'une heure ?

Exercice 2 :

La courbe de la Figure 2 représente la réponse d'un système du 2ème ordre à un échelon unitaire.

2.1) Déduire de cette courbe les paramètres du système.

2.2) On applique à l'entrée du système un signal sinusoïdal d'amplitude $2\,V$ et de fréquence $1\,Hz$.
Calculer l'amplitude et le déphasage du signal en sortie du système, en régime permanent. Commentaire.

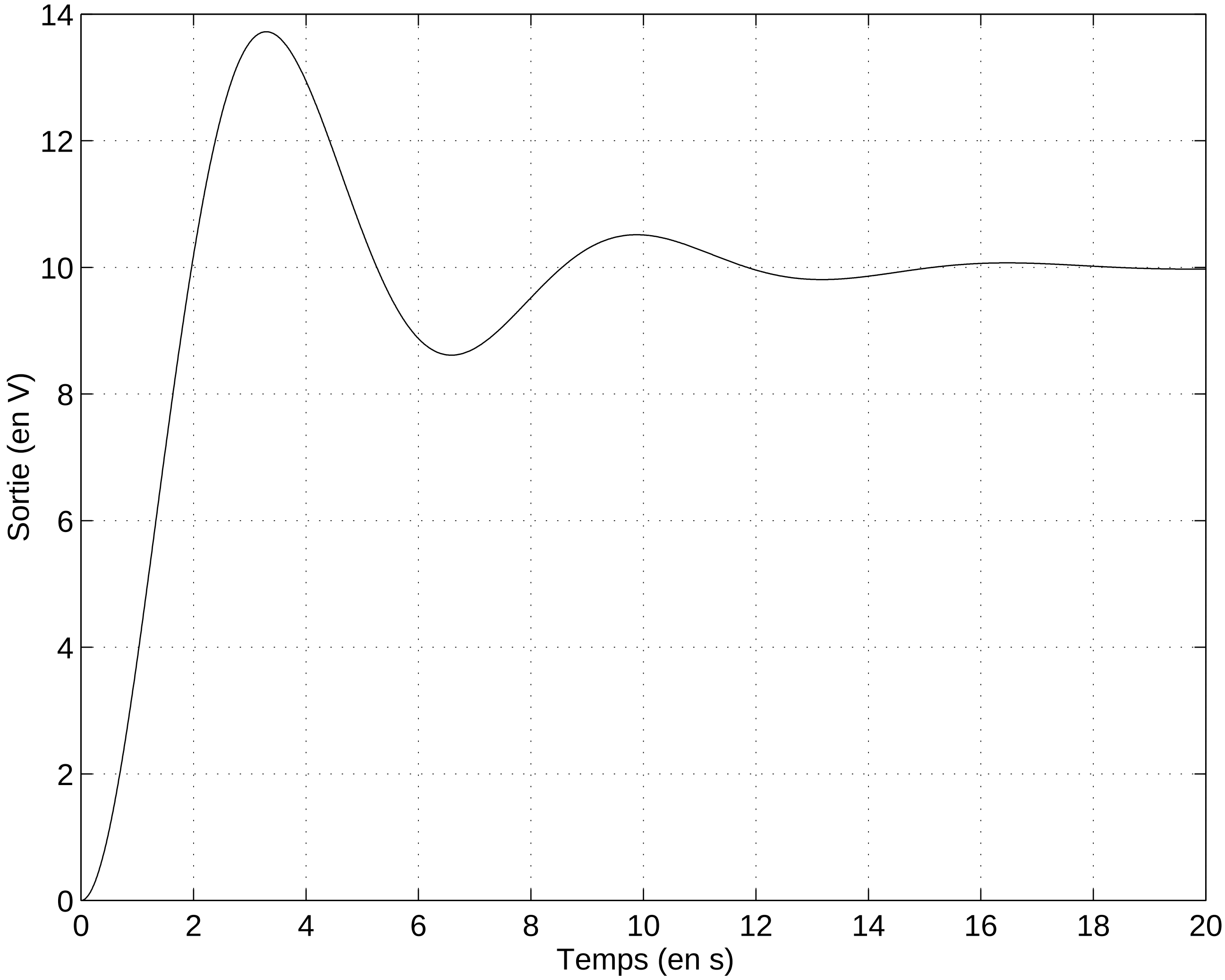


FIG. 2 – *Réponse du système*