Ecole des Mines d'Albi-Carmaux — Novembre 1996
Formation Initiale 2ème année

AUTOMATIQUE : SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS

(durée : 1h30)
(Notes de cours et TD autorisées)

Une réaction chimique $A \xrightarrow{k} B$ a lieu dans 2 réacteurs, parfaitement agités, en cascade comme indiqué Figure 1.
Le produit A réagit de façon irréversible pour former le produit B.
La quantité de réactif A consommée par unité de volume et de temps est proportionnelle à la concentration instantanée de produit A dans le réacteur.
On note C_1 la concentration de produit A dans le premier réacteur (exprimée en moles de A par unité de volume) et C_2 la concentration de produit A dans le second réacteur.
La concentration d'alimentation en produit A est notée C_0.
Le débit d'alimentation en produit A est noté Φ.
C_0 et Φ sont les variables d'entrée qui vont servir à piloter le système.
On suppose que les coefficients de réaction k_1 et k_2 dans chaque réacteur restent constants (opération isotherme).
On suppose que les volumes V_1 et V_2 restent constants.

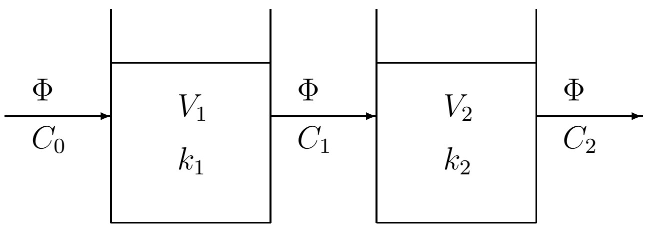

Figure 1

Pour les applications numériques, on prendra les valeurs suivantes :

$$k_1 = 1\,min^{-1}, \qquad k_2 = 2\,min^{-1}, \qquad V_1 = 100\,m^3, \qquad V_2 = 50\,m^3$$

Le point de fonctionnement $(\overline{\Phi}, \overline{C_0}, \overline{C_1}, \overline{C_2})$ choisi est donné par :

$$\overline{\Phi} = 100\, m^3/min, \qquad \overline{C_0} = 0,5\, molA/m^3,$$
$$\overline{C_1} = 0,25\, molA/m^3, \qquad \overline{C_2} = 0,125\, molA/m^3$$

La modélisation de ce système conduit aux équations différentielles suivantes[1] :

$$\begin{aligned} V_1 \frac{dC_1}{dt} &= \Phi(C_0 - C_1) - k_1 V_1 C_1 \\ V_2 \frac{dC_2}{dt} &= \Phi(C_1 - C_2) - k_2 V_2 C_2 \end{aligned} \tag{1}$$

<u>Première partie</u>

Dans cette partie, on simplifie le problème en supposant que le débit d'alimentation en réactif est constant $(\Phi = \overline{\Phi})$.

1) Calculer la fonction de transfert $\dfrac{C_1(p)}{C_0(p)}$.
   Application numérique.
   Montrer que cette fonction de transfert est du 1^{er} ordre.
   Donner son gain statique et sa constante de temps.

2) Calculer la fonction de transfert $\dfrac{C_2(p)}{C_1(p)}$.
   Application numérique.
   Montrer que cette fonction de transfert est du 1^{er} ordre.
   Donner son gain statique et sa constante de temps.

3) En déduire la fonction de transfert $\dfrac{C_2(p)}{C_0(p)}$.
   Application numérique.
   Montrer que cette fonction de transfert est du $2^{\text{ème}}$ ordre.
   Donner son gain statique, son coefficient d'amortissement et sa pulsation des oscillations non-amorties.

[1] On peut vraiment dire que l'examinateur est sympa.

4) Donner l'allure de $C_1(t)$ et $C_2(t)$ en réponse à un échelon de concentration d'alimentation $C_0(t)$.

5) A l'instant $t = 0$ la concentration d'alimentation en réactif passe instantanément de la valeur $\overline{C_0}$ à la valeur $C_{01} = 1,5\, molA/m^3$.
Calculer la concentration en réactif dans le premier et le second réacteur au bout de une minute.

Deuxième partie

Dans cette partie, le débit d'alimentation en réactif n'est plus constant et devient une variable de commande.

6) Expliquer pourquoi le système (1) est maintenant un système non-linéaire.

7) Montrer qu'une linéarisation autour d'un point de fonctionnement $(\overline{\Phi}, \overline{C_0}, \overline{C_1}, \overline{C_2})$ conduit au système linéaire suivant :

$$
\begin{aligned}
V_1 \frac{dx_1}{dt} &= -(\overline{\Phi} + k_1 V_1)x_1 + \overline{\Phi} x_0 + (\overline{C_0} - \overline{C_1})\varphi \\
V_2 \frac{dx_2}{dt} &= \overline{\Phi} x_1 - (\overline{\Phi} + k_2 V_2)x_2 + (\overline{C_1} - \overline{C_2})\varphi
\end{aligned}
\tag{2}
$$

où :

$$
\begin{aligned}
x_0 &= C_0 - \overline{C_0} \\
x_1 &= C_1 - \overline{C_1} \\
x_2 &= C_2 - \overline{C_2} \\
\varphi &= \Phi - \overline{\Phi}
\end{aligned}
$$

8) En choisissant les 2 concentrations x_1 et x_2 à la fois comme variables d'état

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

et comme grandeurs de sortie, écrire la représentation d'état du système.
Calculer numériquement les matrices A, B, C et D.

9) Donner les pôles du système. Le système est-il stable ?

10) En notant $Y(p)$ la transformée de Laplace du vecteur de sortie $y(t)$ et $U(p)$ la transformée de Laplace du vecteur d'entrée $u(t)$, calculer la matrice de transfert du système $\dfrac{Y(p)}{U(p)}$.

11) Comparer ce résultat avec les résultats des questions 1) et 3).