Ecole des Mines d'Albi-Carmaux — Juin 1996
Formation Continue Diplômante

**AUTOMATIQUE**
**SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS ET ÉCHANTILLONNÉS**
(Notes de cours, TD et TP autorisées)

On se propose de réaliser la commande du système analogique de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{p(p+1)}$$

Première partie :

On procède au bouclage du système, en analogique, suivant le schéma de la Figure 1.

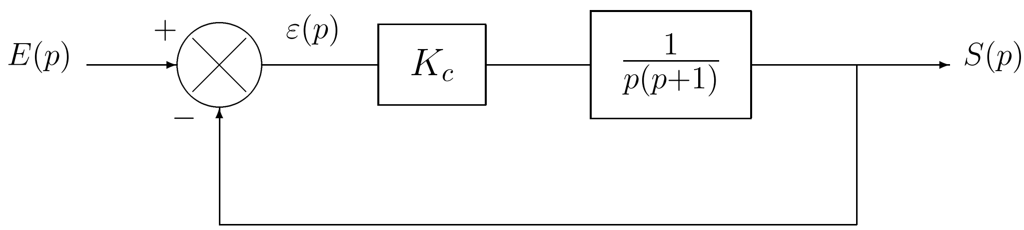


FIG. 1 – *Asservissement analogique*

A.1) Calculer la fonction de transfert de la boucle (FTBO) $T(p)$.
A.2) Calculer la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) $H(p)$.
A.3) Calculer la fonction de transfert $\frac{\varepsilon(p)}{E(p)}$.
A.4) Calculer l'erreur en régime permanent $\varepsilon(+\infty)$ :
- A.4.a) pour une entrée en échelon de position;
- A.4.b) pour une entrée en rampe de pente 1.

A.5) En appelant $u(t)$ le signal de commande envoyé au système, calculer la fonction de transfert $\frac{U(p)}{E(p)}$.

A.6) On peut montrer qu'en réponse à un échelon de position appliqué à l'entrée, la valeur $u(0)$ qui "démarre" le système est le maximum atteint par le signal de commande.
Calculer cette valeur $u(0)$. En quoi ce résultat est-il important ?

A.7) Comment faut-il régler $K_c$ pour que le système bouclé présente une erreur en régime permanent de 1% vis-à-vis d'une rampe de pente 1 en entrée ?
(Pour la suite, on réglera $K_c$ à la valeur trouvée).

A.8) Après avoir remarqué que le système bouclé est du second ordre, donner les valeurs de son gain statique, de son facteur d'amortissement $z$ et de sa pulsation propre non amortie $w_n$.
Pourquoi pouvait-on prévoir la valeur du gain statique ?

A.9) Calculer le temps de pic (instant du premier dépassement) et l'amplitude du premier dépassement de la réponse à un échelon de position unité appliqué en entrée.

A.10) Quels sont les inconvénients de ce réglage ?

Deuxième partie :

On insère le système à piloter dans une boucle de commande numérique suivant le schéma de la Figure 2.

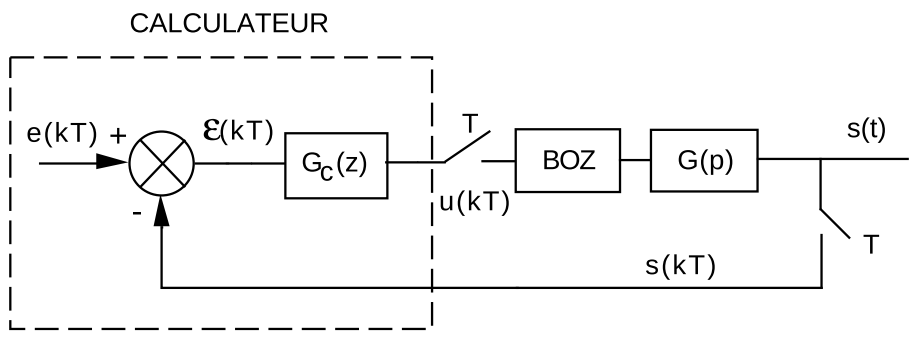


FIG. 2 – *Asservissement échantilllonné*

BOZ désigne un bloqueur d'ordre zéro.

On prend $T = 1\,s$ comme période d'échantillonnage.

B.1) On envisage une commande proportionnelle de gain $K_p$ :

B.1.1) Déterminer la condition de stabilité du système à l'aide du critère de Routh. On pourra utiliser la table des transformées en $z$ fournie en annexe.

B.1.2) Calculer l'erreur en régime permanent :

B.1.2.a) pour une entrée en échelon de position;

B.1.2.b) pour une entrée en rampe de pente 1.

B.1.3) Le cahier des charges impose une erreur en régime permanent de 1% vis-à-vis d'une rampe de pente 1 en entrée.
Quelle est la valeur du gain proportionnel qui convient ? Le fonctionnement du système sera-t-il satisfaisant ? Que proposez-vous ?

B.2) On choisit d'implanter un correcteur numérique de la forme :

$$G_c(z) = \frac{b_0\, z + b_1}{z + a_1}$$

B.2.1) Ecrire l'équation récurrente qui doit être programmée dans le calculateur.

**Table des transformées en $z$ et en $z$ modifiée**

| $G(p)$ | $g(t)$ | $G(z)$ | $G(z, m)$ |
|---|---|---|---|
| $e^{-kTp}$ | $\delta(t - kT)$ | $z^{-k}$ | $z^{m-1-k}$ |
| $1$ | $\delta(t)$ | $1$ ou $z^{-0}$ | $0$ |
| $\frac{1}{p}$ | $u(t)$ | $\frac{z}{z-1}$ | $\frac{1}{z-1}$ |
| $\frac{1}{p^2}$ | $t$ | $\frac{Tz}{(z-1)^2}$ | $\frac{mT}{z-1} + \frac{T}{(z-1)^2}$ |
| $\frac{1}{p^3}$ | $\frac{1}{2\,!}t^2$ | $\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$ | $\frac{T^2}{2}\left[\frac{m^2}{z-1} + \frac{2m+1}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3}\right]$ |
| $\frac{1}{p - \frac{1}{T}\ln a}$ | $a^{\frac{t}{T}}$ | $z/(z-a)$ | $a^m/(z-a)$ |
| $\frac{1}{p+a}$ | $e^{-at}$ | $\frac{z}{z - e^{-aT}}$ | $\frac{e^{-amT}}{z - e^{-aT}}$ |
| $\frac{1}{(p+a)^2}$ | $t\,e^{-at}$ | $\frac{Tz\,e^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$ | $\frac{T\,e^{-amT}\left[e^{-aT} + m(z - e^{-aT})\right]}{(z - e^{-aT})^2}$ |
| $\frac{1}{(p+a)^3}$ | $\frac{t^2}{2}e^{-at}$ | $\frac{T^2 e^{-aT} z}{2(z - e^{-aT})^2} + \frac{T^2 e^{-2aT} z}{(z - e^{-aT})^3}$ | $\frac{T^2 e^{-amT}}{2}\left[\frac{m^2}{z - e^{-aT}} + \frac{(2m+1)e^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2} + \frac{2e^{-2aT}}{(z - e^{-aT})^3}\right]$ |
| $\frac{a}{p(p+a)}$ | $1 - e^{-at}$ | $\frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z - e^{-aT})}$ | $\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-amT}}{z - e^{-aT}}$ |
| $\frac{a}{p^2(p+a)}$ | $t - \frac{1 - e^{-at}}{a}$ | $\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1 - e^{-aT})z}{a(z-1)(z - e^{-aT})}$ | $\frac{T}{(z-1)^2} + \frac{mT - 1/a}{z-1} + \frac{e^{-amT}}{a(z - e^{-aT})}$ |
| $\frac{a}{p^3(p+a)}$ | $\frac{1}{2\,!}\left(t^2 - \frac{2}{a}t + \frac{2}{a^2} - \frac{2}{a^2}e^{-aT}\right)$ | $\frac{T^2 z}{(z-1)^3} + \frac{(aT-2)Tz}{2a(z-1)^2} + \frac{z}{a^2(z-1)} - \frac{z}{a^2(z - e^{-Ta})}$ | $\frac{T^2}{(z-1)^3} + T^2\frac{(m + 1/2 - T/a)}{(z-1)^2} + \frac{\frac{T^2 m^2}{2} - \frac{Tm}{a} + \frac{1}{a^2}}{z-1} - \frac{e^{-amT}}{a^2(z - e^{-aT})}$ |