École des Mines d'Albi-Carmaux — Juin 2006
Formation Continue Diplômante - Cycle Présentiel

AUTOMATIQUE
ANALYSE ET COMMANDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES
CONTINUS OU ÉCHANTILLONNÉS
(Notes de cours et TD autorisées)

– *Les 2 exercices sont indépendants* –

Exercice 1 :

Soit le schéma de la figure 1 correspondant à un processus régulé par un correcteur intégral.

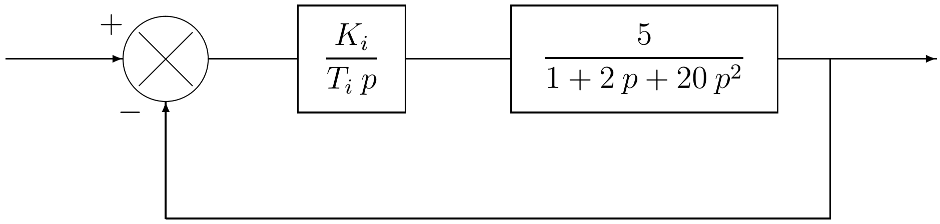

FIG. 1 – Un système asservi avec correcteur intégral.

K_i est un réel positif. T_i est une constante de temps d'intégration.
Ces deux grandeurs sont des paramètres ajustables.

1.1) Calculer la FTBF du système.

1.2) En utilisant le critère de ROUTH, établir la condition de stabilité du système.

1.3) On choisit $T_i = 25\,s$.
Calculer mathématiquement, à partir de la condition limite d'oscillation, la valeur critique de K_i conduisant à l'oscillation.
Déterminer la fréquence d'oscillation f_{osc}.

1.4) Calculer l'erreur de position $\varepsilon(+\infty)$ vis-à-vis d'une consigne constante (échelon).

1.5) Calculer l'erreur $\varepsilon(+\infty)$ vis-à-vis d'une consigne en rampe de pente α (application numérique pour $K_i = 0,2$).

1.6) On remplace le correcteur intégral par un correcteur proportionnel de gain K_p. Vérifier que l'asservissement est alors stable quelle que soit la valeur de K_p. Que deviennent les erreurs calculées en 1.4) et 1.5) ?

Exercice 2 :

On considère un processus continu du 1[er] ordre de gain statique 1 et de constante de temps τ. On réalise la boucle numérique d'asservissement de la figure 2.
Par la suite, on désignera par T la période d'échantillonnage et on posera $\alpha = e^{-\frac{T}{\tau}}$.

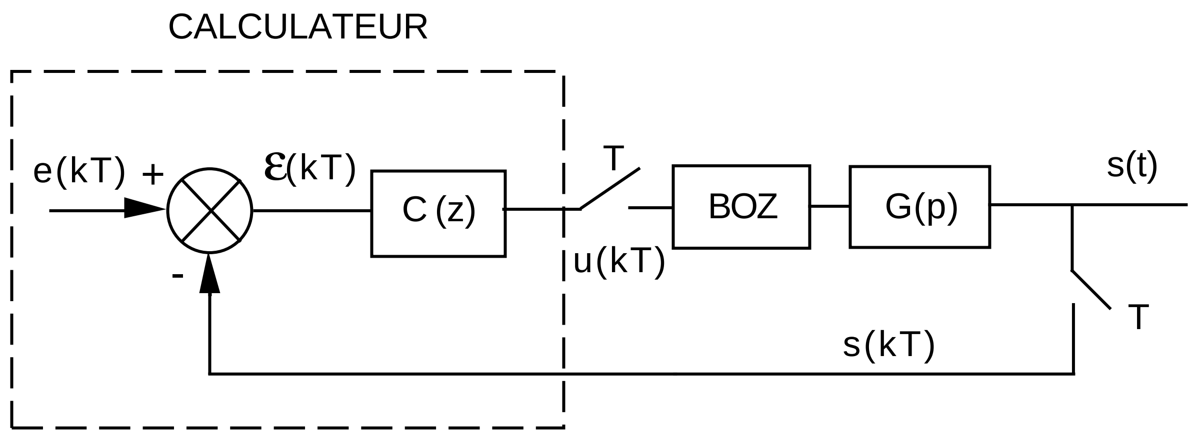

FIG. 2 –

2.1) Calculer la fonction de transfert numérique équivalente au processus continu précédé du bloqueur d'ordre zéro. On désignera cette fonction de transfert par $G_e(z)$.

2.2) En désignant par $E(z)$ la transformée en z de l'entrée et par $H(z)$ la FTBF du système bouclé, exprimer $U(z)$ en fonction de $G_e(z)$, $H(z)$ et $E(z)$.

2.3) Exprimer $C(z)$ en fonction de $G_e(z)$ et $H(z)$.

On souhaite synthétiser un correcteur numérique $C(z)$ tel que le système bouclé se comporte comme un <u>système du 1[er] ordre</u> de gain statique 1 et de constante de temps τ' ($\tau' < \tau$), soit :

$$H(z) = \frac{1-\beta}{z-\beta} \qquad \text{avec } \beta = e^{-\frac{T}{\tau'}}$$

Par la suite, on posera : $x = \dfrac{T}{\tau'}$.

2.4) Quelle condition sur x est imposée par le théorème de Shannon ?

2.5) Calculer $C(z)$ en fonction de α et β.

2.6) En déduire l'équation récurrente à programmer dans l'ordinateur pour réaliser la commande souhaitée.

2.7) Calculer $U(z)$ en fonction de α, β et $E(z)$.

2.8) Dans le cas où l'entrée est un échelon d'amplitude E_0, calculer $u(0)$ (par exemple, en appliquant le théorème de la valeur initiale).

En posant $a = \dfrac{\tau}{\tau'}$, montrer que :

$$u(0) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - e^{-\frac{x}{a}}} E_0$$

On admettra pour la suite que $u(0)$ est la valeur maximale de $u(k)$, que l'on notera u_{max}.

L'abaque de la figure 3, représente la fonction :

$$f_a(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - e^{-\frac{x}{a}}}$$

pour différentes valeurs de a.

Application : la constante de temps du processus est $\tau = 1\,s$. Le système bouclé doit avoir une constante de temps $\tau' = 0,125\,s$. Le signal de commande en réponse à un échelon E_0 doit être inférieur à $6,5\,E_0$ (i.e. $u_{max} = 6,5\,E_0$).

2.9) En utilisant l'abaque de la figure 3, déterminer la fréquence d'échantillonnage maximale qui permet de satisfaire au cahier des charges.

On veut maintenant que $\tau' = \dfrac{\tau}{10}$ avec $\tau = 1\,s$. On impose une fréquence d'échantillonnage de $100\,Hz$.

2.10) Quelle sera la valeur maximum du signal de commande ?

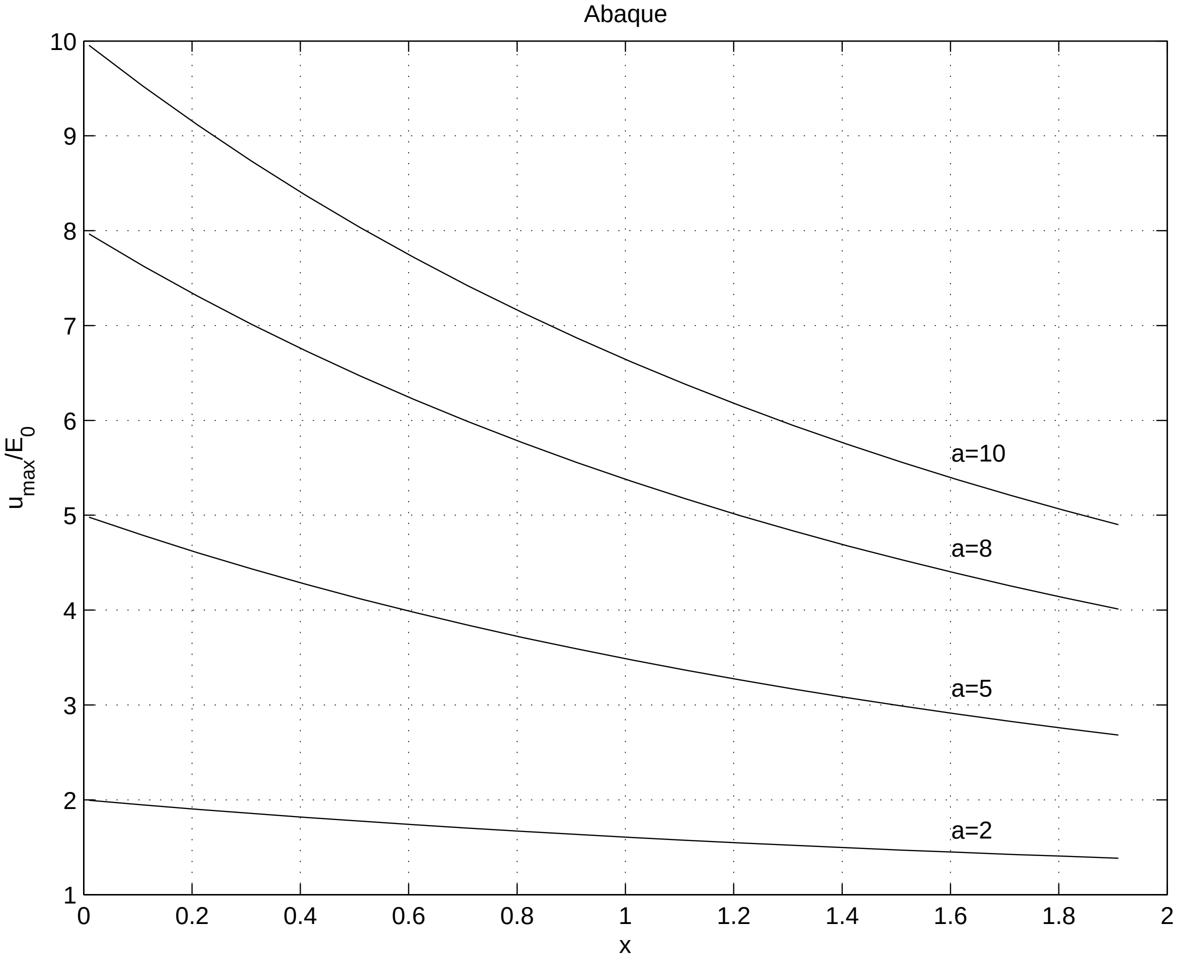
Abaque
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
u_max/E_0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
x
a=10
a=8
a=5
a=2

FIG. 3 –